

Г. Ф. Коновалов

Радио- автоматика

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника для студентов
вузов, обучающихся по специальности
«Радиотехника»

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1990



ББК 32.84
К 64
УДК 621.396.6.52

Рецензенты:
кафедра «Радиосистемы» Ленинградского электротехнического института им. В. И. Ульянова (Ленина), кафедра «Радиопередающие устройства и радиотехнические системы» Минского радиотехнического института

Коновалов Г. Ф.
К64 Радиоавтоматика: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». — М.: Высш. шк., 1990. — 335 с.: ил.
ISBN 5-06-001539-4

В книге изложены принцип действия, способы математического описания, методы анализа качества работы, синтеза и моделирования систем радиоавтоматики: рассмотрены структурные схемы; дан анализ устойчивости, точности и синтеза непрерывных и цифровых систем радиоавтоматики. Большое внимание уделено математическому описанию и оценке характеристик непрерывных и цифровых систем методами пространства состояний, а также основам теории оптимальной фильтрации и способам моделирования на аналоговых и цифровых вычислительных машинах.

К 2302020100(4309000000)—442
001(01)—90 183—90

ББК 32.84
6Ф6.8

ISBN 5-06-001539-4

© Г. Ф. Коновалов, 1990

Предлагаемая читателю книга является учебником по курсу «Радиоавтоматика», включенному в учебные планы радиотехнических вузов и факультетов.

В книге рассматриваются основы теории, методы анализа, проектирования и моделирования непрерывных и цифровых систем радиоавтоматики, применяемых в различных по назначению радиотехнических устройствах и системах радиоуправления.

В гл. 1—9 излагаются методы математического описания, анализа и проектирования непрерывных систем радиоавтоматики, в гл. 10 и 11 анализируются цифровые системы, в гл. 12 описаны основные методы анализа нелинейных систем, в гл. 13 рассмотрены основные принципы работы и проектирования оптимальных и адаптивных систем, в том числе самонастраивающихся и экстремальных, в гл. 14 даны методы моделирования систем радиоавтоматики с помощью ЭВМ. В конце книги приведены задачи различной сложности, которые могут быть использованы студентами при самостоятельной работе и преподавателями при проведении практических занятий. Материал в книге расположен таким образом, чтобы соблюдался принцип перехода от простого к сложному.

Книга написана по материалам лекций, читаемых автором более 25 лет на факультете радиоэлектроники летательных аппаратов Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе.

Автор выражает глубокую признательность за внимание и поддержку, оказанную при написании учебника, проф., д-ру техн. наук В. Т. Фролкину, проф., д-ру техн. наук П. А. Бакулеву, проф., д-ру техн. наук В. И. Самойленко, проф., д-ру техн. наук Ю. И. Судакову, доц., канд. техн. наук А. М. Вонч-Бруевичу, доц., канд. техн. наук Ю. Н. Гришаеву и другим товарищам, принявшим участие в обсуждении рукописи.

Автор благодарит рецензентов рукописи: кафедру «Радиосистемы» Ленинградского электротехнического института им. В. И. Ульянова (Ленина) (зав. кафедрой — проф., д-р техн. наук Ю. М. Қазаринов) и кафедру «Радиопередающих устройств и радиотехнических систем» Минского радиотехнического института (зав. кафедрой — проф. А. Ф. Апович) за полезные советы, способствовавшие улучшению учебника.

Предложения по улучшению книги можно направлять по адресу: 101403, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

В современных радиотехнических устройствах различного назначения и системах радиоуправления широко применяются автоматические системы, которые называются *системами радиоавтоматики (системами РА)*. К числу таких систем относятся устройства фазовой и частотной автоподстройки частоты, автоматической регулировки усиления, системы измерения координат движущихся объектов, измерители дальности, различные следящие фильтры и др.

Выделение систем РА в самостоятельный класс обусловлено их особенностями, связанными с условиями работы в составе радиотехнических устройств и систем радиоуправления, в которых осуществляется обработка параметров радиосигнала при действии различного вида помех.

Надежность и качество работы систем РА во многом определяют характеристики радиоаппаратуры и систем радиоуправления.

Системы РА начали применяться в 30-х годах нашего столетия для автоматической регулировки усиления в радиоприемниках. Развитие радиотехнических устройств, непрерывное усложнение решаемых ими задач привело не только к повышению требований к качеству работы систем РА, но и к их функциональному усложнению, в результате чего многие технические задачи уже не могут быть решены с помощью систем РА, базирующихся на аналоговой технике. Поэтому в настоящее время в радиостановках и системах радиоуправления широко применяются цифровые системы РА, построенные на базе современной микроэлектроники и микропроцессорной техники.

Методы анализа и проектирования современных систем РА могут быть разбиты на две группы. Первая группа основывается на хорошо известных преобразованиях Лапласа, Фурье и Z-преобразовании. Вторая группа ис-

пользует понятие пространства состояния и позволяет оценивать процессы в системах РА в области действительного переменного. Применение второй группы методов связано с выполнением большого объема сложных вычислений, которые могут быть осуществлены на ЭВМ. Поэтому при анализе и проектировании систем РА в настоящее время большую роль играют методы моделирования как на аналоговых вычислительных машинах, так и на цифровых.

Отметим, что методы анализа и проектирования систем РА основаны на общей теории систем автоматического управления, большой вклад в развитие которой внесли советские ученые А. А. Андронов, Н. Н. Боголюбов, В. С. Кулебакин, А. В. Михайлов, В. А. Бесекерский, Е. П. Попов, В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, В. В. Солодовников, Я. З. Цыпкин и многие другие.

Изложение основ указанных методов анализа и проектирования применительно к системам РА является основной задачей книги. Очевидно, что изучение последующих дисциплин учебного плана подготовки радиоспециалистов должно базироваться на тех знаниях, которые студенты получают после ознакомления с курсом «Радиоавтоматика».

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Системы РА функционируют на основе автоматического измерения и дальнейшего преобразования входного сигнала, в качестве которого могут использоваться различные параметры сигналов: электрическое напряжение в системах стабилизации источников питания, частота или фаза напряжения в системах автоматической подстройки частоты, направление прихода радиолокационного сигнала в системах автоматического сопровождения станций (РЛС) по угловым координатам.

Всякий процесс управления, функциональная схема которого приведена на рис. 1.1, подразумевает наличие некоторого устройства — *объекта управления* (ОУ), режим работы которого автоматически изменяется в соответствии с *сигналом управления* $u(t)$, сформированным в *устройстве управления* (УУ) по *управляющему воздействию* $x(t)$. Например, в системе фазовой автоподстройки частоты объектом управления является генератор, частота колебаний напряжения которого (выходной сигнал системы) автоматически поддерживается на заданном уровне, определенном частотой входного сигнала. В системе автоматического сопровождения цели РЛС объектом управления является электромеханическое устройство — антенна РЛС, продольная ось которой автоматически следит за направлением на сопровождаемую цель. Угол отклонения продольной оси антенны от выбранного направления отсчета углов определяет выходной сигнал системы автоматического сопровождения цели РЛС.

Выходной сигнал объекта управления $y(t)$ называют регулируемым, он измеряется с помощью специального датчика (Д), связанного с объектом управления. Очевидно, что измерение связано с ошибками, возникающими из-за шума измерения [на рис. 1.1 это обстоятельство учитывается введением дополнительного сигнала $g_n(t)$].

Объект управления работает в условиях изменения окружающей среды (температуры, давления, влажности и т. п.), колебаний напряжений источников питания. Влияние этих факторов в функциональной схеме учитывается введением случайного сигнала $g(t)$, который называют *возмущающим воздействием*.

Изменение режима работы объекта управления осуществляется сигналом управления $u(t)$, который выра-

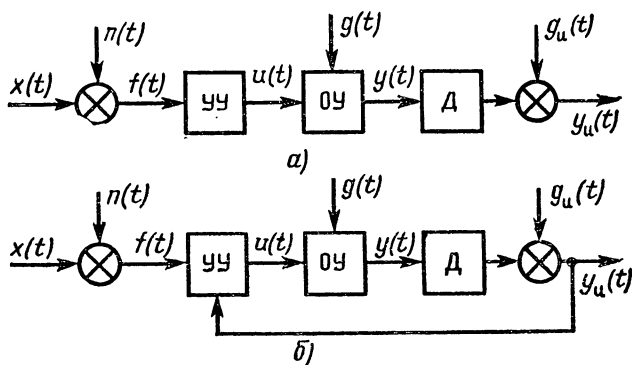


Рис. 1.1. Схема системы РА:
а — разомкнутой; б — замкнутой

батывается во второй части системы — устройстве управления. Требуемый характер управления выходным сигналом определяется управляющим воздействием (входным сигналом) $x(t)$.

В зависимости от принципа формирования сигнала управления $u(t)$ различают два основных вида систем РА: разомкнутые и замкнутые. В *разомкнутых системах* (рис. 1.1, а) сигнал управления зависит только от управляющего воздействия:

$$u(t) = f(x). \quad (1.1)$$

В таких системах РА обеспечивается заранее заданная функциональная связь между управляющим воздействием и выходным сигналом. Из-за помех, действующих на систему, и нестабильности устройств не удастся получить высокую точность работы разомкнутых систем РА, поэтому их применяют редко.

В *замкнутых системах* или в *системах с обратной связью* (рис. 1.1, б) сигнал управления формируется на

основании измерения управляющего воздействия и выходного сигнала:

$$u(t) = f(x, y_n). \quad (1.2)$$

Выражения (1.1) и (1.2) называют *алгоритмами* или *законами управления систем РА*. За счет обратной связи влияние на качество работы замкнутых РА помех и неустойчивости устройств в значительной степени компенсируется. Очевидно, что в разомкнутых системах такой компенсации не происходит, поэтому качество их работы намного ниже, чем в замкнутых системах.

Помимо управляющего воздействия на вход систем РА воздействуют различные помехи $n(t)$, снижающие качество работы систем. Например, в системах автоматического сопровождения РЛС возникновение помех обусловлено флуктуациями сигнала из-за неоднородности диаграммы отражения цели, а также перемещением центра отражения радиолокационного сигнала по цели.

В радиотехнических устройствах большое распространение получили системы, в которых сигнал управления $u(t)$ формируется по измеренному отклонению выходного сигнала от входного воздействия $f(t)$. Схема такой системы показана на рис. 1.2. Сигнал, поступающий с выхода

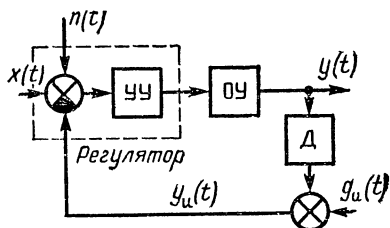


Рис. 1.2. Функциональная схема одноконтурной системы

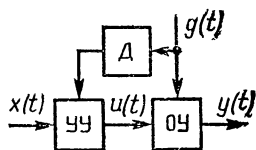


Рис. 1.3. Функциональная схема системы с компенсацией возмущения

системы на ее вход, называют *сигналом обратной связи*, разность

$$e(t) = f(t) - y_n(t) \quad (1.3)$$

— *сигналом рассогласования* или *сигналом ошибки*, а устройство, измеряющее $e(t)$, — *измерителем рассогласования*, который совместно с устройством управления

образует регулятор системы РА. Не следует путать сигнал ошибки с ошибкой системы, которая равна разности управляющего воздействия $x(t)$ и выходного сигнала $y(t)$.

Системы РА, построенные подобным образом, называют *системами, работающими по принципу отклонения или рассогласования*.

Существуют также системы, работающие по принципу компенсации возмущающих воздействий (рис. 1.3). В таких системах возмущающее воздействие измеряется датчиком (Д) и используется для формирования сигнала управления $u(t)$. При выполнении определенных соотношений можно добиться того, чтобы выходной сигнал не зависел от возмущающего воздействия $g(t)$, что является достоинством таких систем управления.

Ниже рассматриваются несколько конкретных систем РА, используемых в различных по назначению радиотехнических устройствах и системах радиоуправления.

§ 1.2 СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Системы автоматической подстройки частоты (АПЧ) применяются в радиоприемных устройствах, доплеровских системах измерения скорости подвижных объектов, устройствах частотной селекции сигналов.

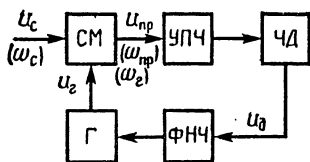


Рис. 1.4. Функциональная схема АПЧ

Рассмотрим систему АПЧ радиоприемного устройства, предназначенную для поддержания промежуточной частоты сигнала на заданном уровне (рис. 1.4). Входной сигнал — напряжение $u_c(t)$ частотой ω_c — преобразуется в смесителе (СМ) в напряжение промежуточной частоты $\omega_{пр}$,

усиливается усилителем промежуточной частоты (УПЧ) и подается на частотный дискриминатор (ЧД). Если промежуточная частота сигнала отличается на $\Delta\omega$ от ее номинального значения, равного центральной частоте УПЧ, то на выходе ЧД возникает напряжение, значение и знак которого зависят от значения и знака отклонения промежуточной частоты $\Delta\omega$. Напряжение с ЧД через фильтр нижних частот (ФНЧ) подается на гетеродин (Г) (перестраиваемый генератор), частота сигнала

которого перестраивается таким образом, что отклонение $\Delta\omega$ уменьшается, в результате чего промежуточная частота с заданной точностью оказывается равной центральной частоте УПЧ $\omega_{\text{про}}$.

Рассмотрим основные соотношения, определяющие точность работы системы АПЧ в установившемся режиме, полагая для простоты, что коэффициент передачи ФНЧ равен единице.

Отклонение промежуточной частоты сигнала $\omega_{\text{пр}}$ от ее номинального значения

$$\Delta\omega = \omega_{\text{пр}} - \omega_{\text{про}} = \Delta\omega_{\text{с}} - \Delta\omega_{\text{г}}, \quad (1.4)$$

где $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{с}} - \omega_{\text{г}}$; $\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{с0}} + \Delta\omega_{\text{с}}$ — частота входного сигнала; $\omega_{\text{г}} = \omega_{\text{г0}} + \Delta\omega_{\text{г}}$ — частота сигнала гетеродина; $\Delta\omega_{\text{с}}$, $\Delta\omega_{\text{г}}$ — отклонения частот входного сигнала и гетеродина от номинальных значений $\omega_{\text{с0}}$, $\omega_{\text{г0}}$.

Напряжение на выходе ЧД является функцией отклонения промежуточной частоты от номинального значения:

$$u_{\text{чд}} = F(\Delta\omega). \quad (1.5)$$

Зависимость $F(\Delta\omega)$ называют *дискриминационной характеристикой* (рис. 1.5). При малых значениях $\Delta\omega$ дискриминационная характеристика линейна и выражение (1.5) принимает вид

$$u_{\text{чд}} = k_{\text{чд}} \Delta\omega, \quad (1.6)$$

где $k_{\text{чд}}$ — коэффициент передачи ЧД (крутизна пеленгационной характеристики).

Под действием напряжения, снимаемого ЧД, частота сигнала с гетеродина перестраивается на

$$\Delta\omega_{\text{г}} = k_{\text{г}} u_{\text{чд}}, \quad (1.7)$$

где $k_{\text{г}}$ — коэффициент передачи гетеродина.

Из выражений (1.4), (1.6) и (1.7) следует, что ошибка регулирования промежуточной частоты в системе АПЧ

$$\Delta\omega = \frac{1}{1+K} \Delta\omega_{\text{с}}, \quad (1.8)$$

где $K = K_{\text{чд}} K_{\text{г}}$ — коэффициент передачи системы АПЧ.

Коэффициент передачи является одной из основных характеристик системы АПЧ, его значение во многом оп-

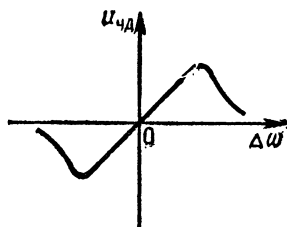


Рис. 1.5. Дискриминационная характеристика ЧД

ределяет точность стабилизации промежуточной частоты, динамические характеристики системы. Из выражения (1.8) следует, что с увеличением коэффициента передачи ошибка (1.8) уменьшается. Зная допустимую ошибку и максимальное значение $\Delta\omega_c$ по (1.8), можно найти необходимый коэффициент передачи системы АПЧ.

По соотношениям (1.4)—(1.7) на рис. 1.6 построена структурная схема системы АПЧ относительно отклоне-

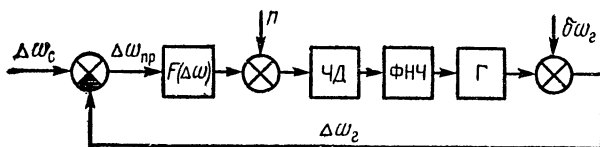


Рис. 1.6. Структурная схема АПЧ

ний от их номинальных значений. На схеме указаны возмущающие воздействия, влияющие на точность работы системы АПЧ; $n(t)$ — флуктуационная составляющая напряжения, поступающего с частотного дискриминатора; $\delta\omega_g$ — нестабильность частоты гетеродина. Рис. 1.6 используют при анализе устойчивости системы АПЧ, ее точности работы.

§ 1.3. СИСТЕМА ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) применяются в радиоприемных устройствах, перестраиваемых по частоте генераторах высокостабильных колебаний и других устройствах. Функциональная схема системы ФАПЧ показана на рис. 1.7. Система стабилизирует частоту подстраиваемого генератора (ПГ) по сигналу с высокостабильного эталонного генератора (ЭГ).

Объектом управления в системе ФАПЧ является ПГ, частота колебаний (или фаза) напряжения которого изменяется в зависимости от напряжения, вырабатываемого управляющим элементом (УЭ), при этом напряжение ПГ остается неизменным. Частота напряжения ПГ является выходным сигналом системы ФАПЧ. На систему действует напряжение от эталонного генератора с частотой $\omega_{\text{э}}$, этот сигнал является управляющим воздействием.

Измерителем рассогласования является фазовый детектор (ФД), выходной сигнал которого является нелинейной периодической функцией разности фаз сигналов, подаваемых от ЭГ и ПГ. Сигнал с ФД через фильтр нижних частот (ФНЧ) подается на УЭ, который перестраивает частоту ПГ, приближая ее к частоте ЭГ. В установившемся режиме в системе устанавливается постоянная разность фаз между напряжениями u_Σ и u_Γ , при этом напряжение на выходе ФД также будет постоянным, в результате чего частота сигнала с ПГ окажется равной частоте сигнала с ЭГ.

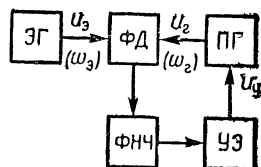


Рис. 1.7. Функциональная схема ФАПЧ

Начальное рассогласование частот от ЭГ и ПГ

$$\Delta\omega_n = \omega_\Sigma - \omega_{\Gamma n}, \quad (1.9)$$

где $\omega_{\Gamma n}$ — начальная частота сигнала ПГ.

После-включения системы ФАПЧ частота сигнала ПГ

$$\omega_\Gamma = \omega_{\Gamma n} + \omega_{\Gamma y}. \quad (1.10)$$

Составляющая $\omega_{\Gamma y}$ возникает из-за перестройки частоты ПГ и определяется выражением

$$\omega_{\Gamma y} = k_\Gamma k_{y\Phi} u_{\Phi\Delta} = k_\Gamma k_{y\Phi} F(\varphi) k_\Delta, \quad (1.11)$$

где k_Γ — коэффициент передачи ПГ по частоте; $k_{y\Phi}$ — коэффициент передачи УЭ; k_Δ — коэффициент, равный максимальному напряжению на выходе ФД; φ — разность фаз напряжений ЭГ и ПГ.

Для простоты принято, что ФНЧ отсутствует и напряжение с ФД подается на УЭ. Величина

$$\omega_{y\Delta} = k_\Gamma k_{y\Phi} k_\Delta, \quad (1.12)$$

имеющая размерность круговой частоты, определяет максимальное допустимое начальное рассогласование частот $\Delta\omega_n$, которое может быть скомпенсировано в системе ФАПЧ, эту величину называют полосой удержания системы. С учетом выражений (1.11) и (1.12) частота сигнала с ПГ (1.10) оказывается равной

$$\omega_\Gamma = \omega_{\Gamma n} + \omega_{y\Delta} F(\varphi). \quad (1.13)$$

Разность фаз сигналов с ЭГ и ПГ определяется вы-

ражением

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t (\omega_s - \omega_r) dt, \quad (1.14)$$

где φ_0 — начальное значение разности фаз.

Из последнего выражения следует, что

$$\dot{\varphi} = \omega_s - \omega_r. \quad (1.15)$$

В установившемся режиме разность фаз φ — постоянная величина, поэтому частота сигнала ПГ равна частоте сигнала ЭГ, т. е. ошибка стабилизации частоты сигнала ПГ равна нулю.

Подставив в выражение (1.15) формулу (1.13), получим нелинейное дифференциальное уравнение для системы ФАПЧ:

$$\dot{\varphi} + \omega_{уд} F(\varphi) = \Delta\omega_n. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) является основным дифференциальным уравнением системы ФАПЧ; из этого уравнения следует, что в любой момент времени алгебраическая сумма разности частот $\omega_s - \omega_r$ и расстройки является постоянной величиной, равной начальному рассогласованию частот сигналов ЭГ и ПГ.

Уравнениям (1.9)–(1.15) соответствует структурная схема системы ФАПЧ, изображенная на рис. 1.8. Блок

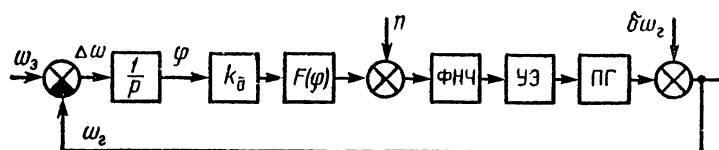


Рис. 1.8. Структурная схема ФАПЧ

$1/p$ позволяет выполнить операцию интегрирования, соответствующую выражению (1.14), возмущение $n(t)$ учитывает влияние на качество работы системы флуктуационной составляющей напряжения, а воздействие $\delta\omega_r$ — влияние нестабильности частоты ПГ.

§ 1.4. СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ЦЕЛИ БОРТОВОЙ РЛС

Радиолокационная станция (РЛС) сопровождения предназначена для автоматического измерения составляющих угла отклонения линии визирования (линия

РЛС — сопровождаемая цель) в системе координат $Ox_c y_c z_c$, связанной с летательным аппаратом (рис. 1.9, а). Антенна РЛС устанавливается в карданном подвесе, наружная рамка которого вращается в горизонтальной, а внутренняя — в вертикальной плоскостях (рис. 1.9, б). С антенной связана система координат

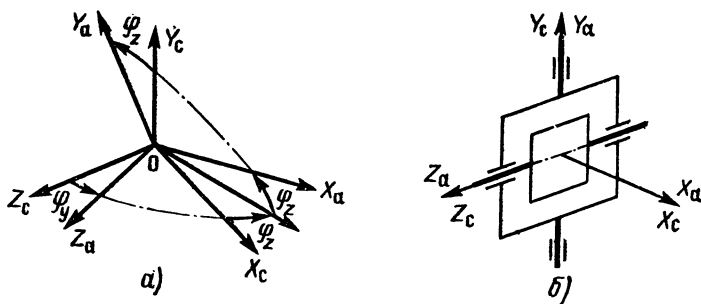


Рис. 1.9. К определению углов отклонения линии визирования: а — система координат $Ox_A y_A z_A$ относительно $Ox_c y_c z_c$; б — схема карданного подвеса

$Ox_A y_A z_A$, ось Ox_A которой нормальна к плоскости внутренней рамки карданного подвеса и совпадает с продольной осью антенны. Для измерения углов отклонения линии визирования в горизонтальной φ_y и вертикальной φ_z плоскостях на рамках карданного подвеса устанавливаются аналоговые или цифровые датчики.

Современные РЛС строятся как моноимпульсные (одноимпульсные) системы, в которых измерение угловых координат сопровождаемой цели осуществляется по одному отраженному от цели импульсу. РЛС — это многоканальное устройство, два канала требуются для измерения составляющей угла отклонения линии визирования в горизонтальной плоскости и два — для измерения в вертикальной плоскости. Для этого в антенне РЛС формируются одновременно в каждой из плоскостей две остронаправленные перекрещивающиеся диаграммы направленности. На рис. 1.10, а изображены две такие диаграммы направленности для пеленгации цели в вертикальной плоскости; диаграммы разнесены относительно равносигнального направления (РСН) на постоянный угол θ_0 . Если линия визирования отклонена от РСН на угол ϵ , который является сигналом рассогласования в системе

автосопровождения, то сигналы, принятые по диаграммам направленности, будут различными: сигнал E_1 , принятый по верхней диаграмме направленности, будет больше сигнала E_2 , принятого по нижней диаграмме:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_0 + k_A e E_0; \\ E_2 &= E_0 - k_A e E_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

где E_0 — сигнал, принимаемый по РСН; k_A — постоянный коэффициент.

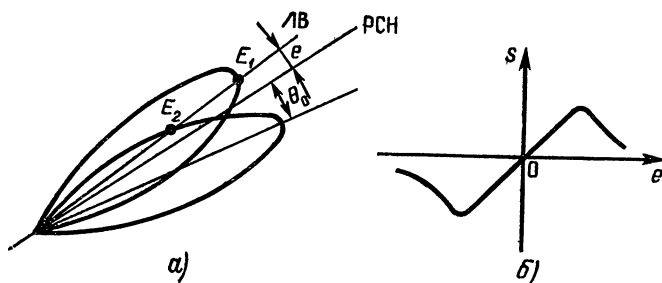


Рис. 1.10. К определению пеленгационной характеристики РЛС:

a — диаграмма направленности; b — пеленгационная характеристика

Разность амплитуд принятых сигналов

$$E_p = E_1 - E_2 = 2K_A e E_0 \quad (1.18)$$

пропорциональна углу отклонения линии визирования от РСН. Для того чтобы исключить влияние на измерение напряжения, пропорционального углу отклонения e от абсолютных значений принимаемых сигналов E_1 и E_2 , разностный сигнал (1.18) нормируется суммарным сигналом:

$$E_c = E_1 + E_2 = 2E_0. \quad (1.19)$$

В этом случае отношение амплитуды разностного сигнала (1.18) к амплитуде суммарного сигнала (1.19)

$$E_p/E_c = k_A e = S \quad (1.20)$$

пропорционально углу отклонения линии визирования от РСН. Зависимость (1.20) называют *пеленгационной характеристикой* (рис. 1.10, б). Эта характеристика определяет коэффициент передачи приемника РЛС, допустимый диапазон угла рассогласования от РСН.

На рис. 1.11 показана функциональная схема моноимпульсного приемника, в котором реализация соотношения

(1.20) обеспечивается устройством автоматической регулировки усиления (АРУ). Суммарный сигнал (1.19) является также опорным сигналом для фазового детектора

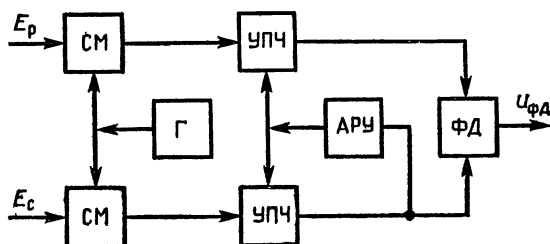


Рис. 1.11. Функциональная схема моноимпульсного приемника

системы автосопровождения, напряжение на выходе которого

$$u_{\text{ФД}} = k_{\text{ФД}} k_A e, \quad (1.21)$$

где $k_{\text{ФД}}$ — коэффициент передачи фазового детектора.

На рис. 1.12, а показана структурная схема системы автосопровождения РЛС, из которой видно, что напряжение с приемника (П) через корректирующее устройство (КУ) подается на усилитель мощности (УМ), на который подступает и сигнал с местной обратной связи

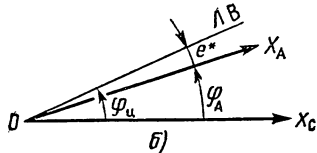
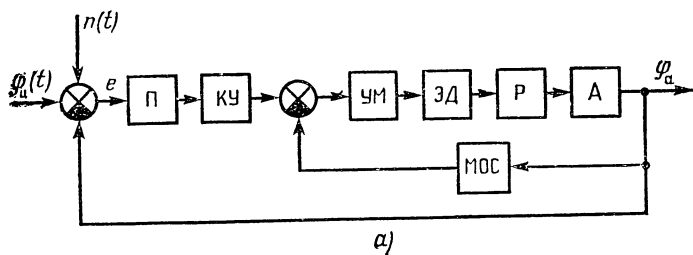


Рис. 1.12. Система автоматического сопровождения:
а — структурная схема; б — в отсчету углов

(МОС). Усилитель мощности вводится для обеспечения нормальной работы электрического двигателя (ЭД), который через редуктор (Р) поворачивает антенну (А) в направлении уменьшения сигнала рассогласования, не превышающего в режиме сопровождения цели допустимого значения. С помощью КУ, включенного после фазового детектора приемника, и местной обратной связи обеспечивается устойчивость и необходимые динамические свойства системы автосопровождения цели РЛС.

Система автосопровождения работает в условиях действия ряда возмущающих воздействий (помех), основными из которых являются следующие: флуктуация отраженного от цели радиолокационного сигнала, угловой шум, обусловленный перемещением по цели центра отражения сигнала (блуждение блестящей точки), шум первых каскадов приемника. Эти возмущающие воздействия снижают точность работы системы автосопровождения. На структурной схеме системы (рис. 1.12, а) эти воздействия учитываются введением возмущающего воздействия $n(t)$.

Регулируемым параметром в системе автосопровождения цели является угол отклонения оси антенны РЛС φ_a от продольной оси летательного аппарата OX_0 , а управляющим воздействием (входным сигналом) — угол отклонения линии визирования $\varphi_{ц}$. Объект управления — антенна РЛС, состояние которой (угол отклонения и его производные) должно изменяться так, чтобы продольная ось антенны с необходимой точностью была направлена на сопровождаемую цель, а производные от ее угла отклонения не превышали допустимых значений.

§ 1.5. СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ УСИЛЕНИЯ

Системы автоматической регулировки усиления (АРУ) широко применяются в радиоприемных устройствах различного назначения, они предназначены для стабилизации уровня сигнала на выходе усилителей при большом динамическом диапазоне изменения входного сигнала, достигающим, например, в радиолокационных приемниках 60—100 дБ. При таком диапазоне изменения входного сигнала и отсутствии системы АРУ нарушается нормальная работа приемных устройств, что проявляется в перегрузке последующих каскадов приемника. В системах автоматического сопровождения цели РЛС пере-

грузке каскадов приемника приводит к искажению амплитудной модуляции, к снижению коэффициентов усиления, вплоть до срыва сопровождения. В системах стабилизации частоты большой динамический диапазон изменения сигнала вызывает изменение крутизны дискриминационной характеристики, что резко снижает качество работы системы.

Системы АРУ делятся на три основных типа [7]: 1) с обратной связью (с обратным действием); 2) без обратной связи (прямого действия); 3) комбинированные. Существуют одно- и многопетлевые системы АРУ с непрерывной и цифровой регулировкой.

Функциональная схема системы АРУ с обратной связью показана на рис. 1.13. Входное напряжение $u_{вх}(t)$ посту-

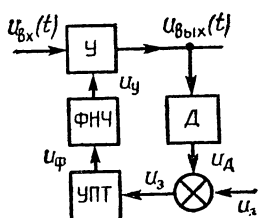


Рис. 1.13. Функциональная схема АРУ

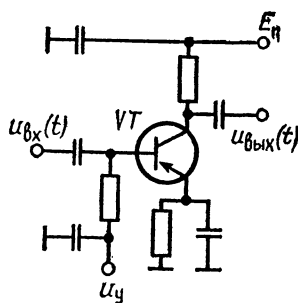


Рис. 1.14. Схема регулируемого каскада

пает на усилитель (У) с регулируемым коэффициентом усиления. Выходное напряжение этого усилителя детектируется, после чего суммируется с напряжением задержки $u_з$. Суммарное напряжение $u_с$ усиливается усилителем постоянного тока (УПТ) и подается на фильтр нижних частот (ФНЧ). Напряжение с ФНЧ u_y используется для регулировки коэффициента усиления входного сигнала. Зависимость коэффициента усиления усилителя входного сигнала от управляющего напряжения называют *регулирующей характеристикой*. В общем случае эта характеристика нелинейная, однако приближенно она может быть заменена линейной зависимостью вида

$$k(u_y) = k_0 - \alpha u_y, \quad (1.22)$$

где k_0 — коэффициент усиления при управляющем напряжении, равном нулю; α — крутизна регулировочной характеристики.

Изменение коэффициента усиления может быть достигнуто различными способами: путем включения управляемого аттенюатора, изменением крутизны характеристик электронных приборов и др. [7]. В качестве примера на рис. 1.14 показана схема усилителя с регулируемым коэффициентом усиления, в котором управляющее напряжение подается на базу транзистора VT . При увеличении управляющего напряжения напряжение на базе повышается, в результате чего коэффициент усиления каскада уменьшается.

Эффект стабилизации уровня выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ достигается за счет того, что с ростом уровня $u_{\text{вых}}(t)$ увеличивается и управляющее напряжение u_y , под действием которого в соответствии с выражением (1.22) уменьшается коэффициент усиления усилителя входного сигнала, что приводит к снижению уровня выходного сигнала.

Для того чтобы не снижать усиление при слабых входных сигналах и начать управление коэффициентом усиления усилителя только при достижении входным сигналом определенного уровня в систему АРУ подают напряжение задержки u_z . В результате напряжение управления появится только в том случае, когда напряжение с амплитудного детектора превысит напряжение задержки.

ФНЧ в цепи обратной связи системы АРУ предназначен для передачи управляющего напряжения с частотами изменения уровня выходного напряжения АРУ. При этом ФНЧ не должен пропускать колебания управляющего напряжения с частотами спектра полезной модуляции сигнала $u_{\text{вх}}(t)$, в противном случае происходит демодуляция входного сигнала, ослабляющая выходной сигнал.

Непосредственно из схемы рис. 1.13 следует, что напряжение на выходе УПТ

$$u_{\phi} = (u_{\text{вых}} k_d - u_z), \text{ если } u_{\text{вых}} k_d \geq u_z; \quad (1.23)$$

$$u_{\phi} = 0, \text{ если } u_{\text{вых}} k_d < u_z,$$

где k_d — коэффициент передачи детектора.

Управляющее напряжение на выходе ФНЧ находят из следующего дифференциального уравнения:

$$T \dot{u}_y + u_y = u_{\phi}. \quad (1.24)$$

Напряжение на выходе системы АРУ

$$u_{\text{вых}} = k(u_y) u_{\text{вх}} = (k_0 - \alpha u_y) u_{\text{вх}}, \quad (1.25)$$

Уравнениям (1.23) — (1.25) соответствует структурная схема системы АРУ, изображенная на рис. 1.15. В этой схеме нелинейное звено описывается зависимостью

$$u_d - u_3 = \begin{cases} u_d - u_3 & \text{при } u_d \geq u_3; \\ 0 & \text{при } u_d < u_3. \end{cases} \quad (1.26)$$

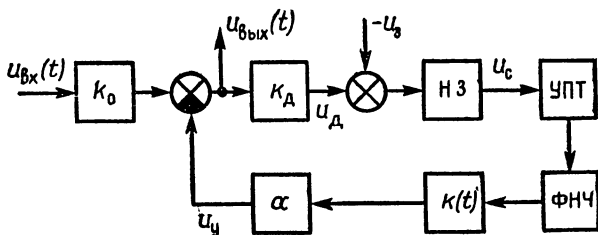


Рис. 1.15. Структурная схема системы АРУ

Отличительной особенностью системы АРУ по сравнению с системами РА, рассмотренными в предыдущих параграфах, является зависимость коэффициента передачи системы от времени, что происходит из-за наличия в системе (рис. 1.15) звена с коэффициентом передачи $k(t) = f(u_{вх}(t))$. Кроме того, из-за нелинейного звена с характеристикой (1.26) система АРУ является нелинейной. Анализ нелинейных систем с переменными параметрами является сложной задачей.

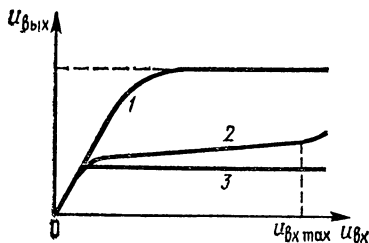


Рис. 1.16. Регулировочные характеристики системы АРУ

В установившемся режиме при постоянном уровне напряжения на входе системы АРУ из уравнений (1.23) — (1.26) следуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_{вых} &= k_0 u_{вх} \quad \text{при } u_d < u_3; \\ u_{вых} &= \frac{k_0 + \alpha k_{упт} u_3}{1 + \alpha u_{вх} k_d k_{упт}} u_{вх} \quad \text{при } u_d \geq u_3, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $k_{упт}$ — коэффициент усиления УПТ.

Уравнение (1.27) определяет регулировочную харак-

теристику системы АРУ с обратной связью (кривая 2 на рис. 1.16), на этом же рисунке изображена характеристика без АРУ (кривая 1) и регулировочная характеристика с идеальной системой АРУ (кривая 3).

§ 1.6. СИСТЕМА ИЗМЕРЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ РЛС

Дальномер РЛС предназначен для измерения дальности до выбранной цели, информация о которой используется в счетно-решающих устройствах систем наведения летательных аппаратов, навигационных комплексах и др.

Принцип работы дальномера базируется на измерении сдвига между зондирующими импульсами, следующими через интервал времени T , и импульсами, отраженными от цели. Отраженные от цели импульсы искажены шумами, поэтому непосредственное измерение дальности по времени задержки связано с большими ошибками. Для повышения точности измерения в дальномере формируются следящие импульсы, временное положение которых относительно зондирующих импульсов оказывается пропорциональным дальности до цели и незначительно зависит от шумов. На рис. 1.17 приведена упрощенная

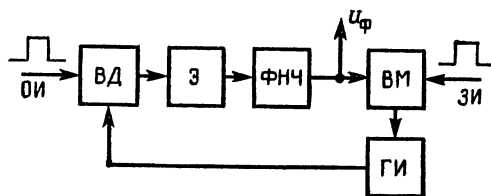


Рис. 1.17. Функциональная схема дальномера импульсной РЛС

функциональная схема дальномера импульсной РЛС [17]. В режиме измерения дальности отраженный от цели импульс (ОИ) через приемник поступает на временной дискриминатор (ВД), на второй вход которого с генератора импульсов (ГИ) подаются на два следующих друг за другом следящих импульса. Во временном дискриминаторе вырабатывается напряжение, пропорциональное рассогласованию временного положения отраженного импульса относительно оси симметрии сле-

дящих импульсов:

$$u = k_d (t_R - t_n) = k_d \Delta t, \quad (1.28)$$

где Δt — рассогласование по времени между отраженным и следящими импульсами; $t_R = 2R/c$ — время задержки отраженного импульса относительно зондирующего; t_n — время задержки следящих импульсов; R — измеряемая дальность; c — скорость света.

На рис. 1.18 приведены эпюры напряжений, поясняющие принцип работы временного дискриминатора. Если временное рассогласование Δt не равно нулю, то во временном дискриминаторе вырабатываются два импульса, длительности которых

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau/2 - \Delta t; \\ \tau_2 &= \tau/2 + \Delta t, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где τ — длительность отраженного импульса.

Импульсы длительностями τ_1 и τ_2 детектируются, разность полученных напряжений является выходным напряжением временного дискриминатора u_d . На каждом периоде измерения дальности напряжение с выхода временного дискриминатора фиксируется экстраполятором (Э) и сбрасывается до нуля перед приходом следующей пары следящих импульсов. Напряжение с Э через ФНЧ подается на временной модулятор (ВМ), который зондирующим импульсом (ЗИ), задержанным на время, пропорциональное сигналу с ФНЧ, запускает ГИ, формирующий два следящих импульса. Таким образом, образуется замкнутый контур, в котором рассогласование сводится к минимальному значению, определяющему ошибку измерения дальности. Для повышения точности работы в ФНЧ дальномеров включают интегратор, при этом рассогласование Δt при измерении постоянного значения дальности сводится к нулю, а напряжение на

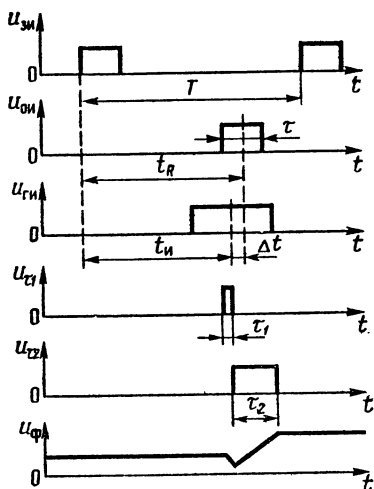


Рис. 1.18. Эпюры напряжений временного дискриминатора

выходе ФНЧ в установившемся режиме пропорционально измеряемой дальности:

$$u_{\Phi} = \frac{1}{k_{\text{ВМ}}} t_R = \frac{1}{k_{\text{ВМ}}} \frac{2R}{c}, \quad (1.30)$$

где $k_{\text{ВМ}}$ — коэффициент передачи временного модулятора.

Для повышения точности измерения дальности в современных РЛС в ФНЧ дальномера включают два интегратора, в такой системе ошибка измерения дальности равна нулю при изменении расстояния до цели по линейному закону.

Описанные процессы поясняют работу дальномера в импульсной РЛС, здесь информация об измеряемой дальности может быть получена только в дискретные моменты времени, отстоящие на период повторения, поэтому рассмотренный дальномер относится к классу импульсных систем РА.

На рис. 1.19 показана структурная схема дальномера, в которой ключ характеризует импульсный характер

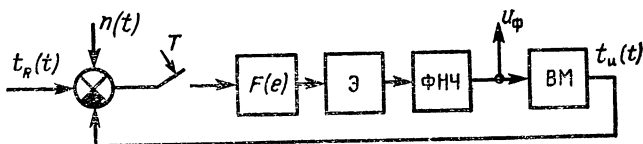


Рис. 1.19. Структурная схема дальномера

сигнала, а звено с характеристикой $F(e)$ соответствует временному дискриминатору (вид этой характеристики зависит от отношения сигнал/шум и длительности следящих импульсов); $n(t)$ — случайная помеха, ухудшающая качество работы дальномера.

§ 1.7. ОБОБЩЕННАЯ СТРУКТУРНАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ РА

Сравнивая различные системы РА, рассмотренные в § 1.2—1.6, нетрудно установить, что их структурные схемы во многом повторяют одна другую. Аналогия структурных схем систем РА позволяет составить их обобщенную структурную схему (рис. 1.20). На этой схеме приняты следующие обозначения: $x(t)$ — входной сиг-

нал или управляющее воздействие (угол поворота линии визирования в системе автоматического сопровождения цели РЛС, частота эталонного генератора в системе фазовой подстройки частоты и т. п.); $y(t)$ — выходной сигнал, или регулируемый параметр (угол поворота антен-

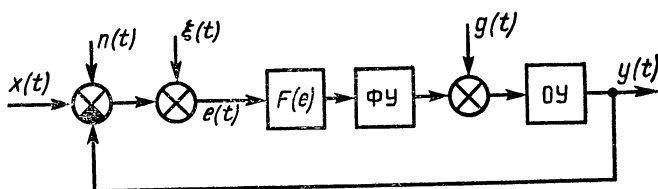


Рис. 1.20. Обобщенная структурная схема системы РА

ны РЛС, частота перестраиваемого генератора); $e(t)$ — сигнал рассогласования, или сигнал ошибки. Работа систем РА происходит в условиях действия различных помех. На обобщенной структурной схеме системы влияние помех учитывается введением возмущающего воздействия $n(t)$, поступающего на вход системы. Это воздействие может состоять из нескольких составляющих, например в системе автоматического сопровождения цели РЛС оно состоит из флуктуаций отраженного от цели сигнала, воздействия, возникающего из-за перемещения центра отражения радиолокационного сигнала по поверхности цели, шумов первых каскадов электронных приборов приемника и т. п. Возмущающее воздействие $g(t)$ поступает на объект управления системы РА, это воздействие обусловлено в основном изменением условий окружающей среды (температуры, давлений, влажности и т. п.) и флуктуациями источников питания.

Известно, что одним из основных недостатков непрерывных систем РА является дрейф нуля их регулировочных (амплитудных) характеристик. В обобщенной структурной схеме системы РА влияние дрейфа нуля учитывается сигналом сдвига $\xi(t)$, например в системах автоматического сопровождения цели РЛС сигнал $\xi(t)$ учитывает дрейф нуля пеленгационной характеристики.

Функциональные устройства (ФУ) систем РА, указанные в обобщенной структурной схеме, включают устройства измерения сигнала ошибки, исполнительные и кор-

ректирующие устройства, предназначенные для создания необходимых динамических характеристик [например, к этой части системы относится ФНЧ в системе фазовой подстройки частоты (см. рис. 1.8)]. На рис. 1.20 ОУ — объект управления (антенна в РЛС, перестраиваемый генератор в системе фазовой подстройки частоты), $F(e)$ — дискриминатор, который, как отмечалось, имеет нелинейную характеристику. При малых сигналах ошибки амплитудная характеристика дискриминатора может быть принята линейной:

$$u_d = k_d e. \quad (1.31)$$

Форма дискриминационной характеристики зависит от амплитуды сигнала ошибки, что приводит к нежелательным изменениям динамических характеристик систем РА. Для исключения такой зависимости проводится нормировка сигнала по амплитуде, что достигается путем введения АРУ или ограничителя.

Иногда в системах радиуправления радиотехнических устройств встречаются системы, структурные схемы которых отличаются от их рассмотренной обобщенной схемы, например системы автоматического сопровождения бортовых РЛС выполняются как комплексные системы, в которых для повышения точности имеется дополнительный канал. Однако в этих случаях введенная обобщенная структурная схема РА является основной для анализа ее качественных и количественных характеристик.

§ 1.8. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ РА

Системы РА классифицируются по различным признакам. Например по принципу построения, как отмечалось, различают *системы с управлением по отклонению и возмущению*.

По виду входного сигнала системы РА делятся на: *системы стабилизации*, где входной сигнал является постоянной величиной (например, системы автоматической стабилизации частоты и напряжения); *системы программного управления*, в которых входной сигнал является известной функцией (например, система управления антенной РЛС в режиме поиска); *следающие системы*, в которых входной сигнал является случайным (например, система автоматического сопровождения цели РЛС).

В зависимости от вида уравнений, описывающих про-

цессы в системах, различают *непрерывные и дискретные, линейные и нелинейные, стационарные* (с постоянными параметрами) и *нестационарные* (с переменными параметрами) системы РА. Одна и та же система может характеризоваться несколькими признаками, например система автоматической регулировки усиления — это нестационарная нелинейная система.

В современных радиотехнических устройствах важную группу составляют *цифровые системы*, в состав которых входят вычислительные машины или элементы этих машин. С точки зрения математического описания цифровые системы РА являются дискретными нелинейными.

Для улучшения качества работы систем РА в управляющем устройстве могут вырабатываться не только сигналы управления, но и изменяться алгоритмы управления и перестраиваться параметры системы (коэффициенты усиления звеньев, постоянные времени корректирующих устройств), в результате чего достигается высокое качество работы системы. Подобные системы РА называются *адаптивными*.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 1

1. Какой принцип управления реализуется в системах РА с обратными связями? Поясните этот принцип на примере систем АПЧ и ФАПЧ.
2. Что такое регулятор (управляющее устройство) системы РА?
3. Каким образом измеряется сигнал рассогласования в системе автоматического сопровождения цели РЛС?
4. Каким образом система РА должна реагировать на сигнал и возмущающее воздействие?
5. Дайте классификацию систем РА по виду входного сигнала.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 2.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ СИСТЕМ РА

Процессы, происходящие в системах РА, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые могут быть решены в отдельных редких случаях. Однако уравнения большого числа систем могут быть

линеаризованы. При этом процессы в системах описываются линейными дифференциальными уравнениями вида

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_0 x(t). \quad (2.1)$$

В стационарных системах РА коэффициенты дифференциального уравнения (2.1) являются постоянными величинами, в нестационарных — переменными. Методы анализа линейных систем РА основываются на принципе суперпозиции, который заключается в следующем. Если на систему поступает управляющее воздействие, которое можно представить в виде суммы простых воздействий

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_k(t), \quad (2.2)$$

то выходной сигнал определяется как сумма реакций на каждое слагаемое (2.2).

Решение дифференциального уравнения (2.1) связано с вычислительными трудностями, а во многих случаях, например в следящих системах, не может быть осуществлено, так как не известно управляющее воздействие. По этим причинам исследование систем РА ведется косвенными методами, базирующимися на операционном методе Лапласа и преобразовании Фурье.

Для этой цели в теории систем РА используются следующие основные характеристики: *передаточная функция, переходная и импульсная переходная функции, комплексный коэффициент передачи или частотная характеристика.*

§ 2.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Применив к дифференциальному уравнению (2.1) преобразование Лапласа, получим

$$D(p) Y(p) = N(p) X(p) + M_n(p), \quad (2.3)$$

где $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$; $N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0$; $Y(p)$ — преобразование Лапласа для выходного сигнала системы; $X(p)$ — преобразование Лапласа для входного сигнала; M_n — многочлен, отображающий начальные условия.

Введем следующие обозначения:

$$W(p) = N(p)/D(p); \quad W_n(p) = M_n(p)/D(p). \quad (2.4)$$

Тогда выражение (2.3) примет вид

$$Y(p) = W(p) X(p) + W_n(p). \quad (2.5)$$

Это уравнение связывает изображение выходного сигнала системы с изображением входного сигнала и начальным состоянием системы. Функция $W(p)$ характеризует динамические свойства системы РА, она не зависит от управляющего воздействия и полностью определяется параметрами системы a_i и b_i , эту функцию называют *передаточной*, а функцию $W_n(p)$ — *передаточной функцией относительно начального состояния системы РА*.

При нулевых начальных условиях *передаточная функция системы РА равна отношению изображения по Лапласу выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала*. Передаточная функция является дробно рациональной функцией относительно оператора преобразования Лапласа:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (2.6)$$

Степень полинома знаменателя передаточной функции определяет порядок системы РА. В реальных системах степень полинома числителя передаточной функции не превышает степени полинома знаменателя. Это условие называют *физической реализуемостью системы РА*; оно означает, что нельзя создать систему РА, передаточная функция которой не удовлетворяла бы этому условию.

Корни полинома числителя передаточной функции β_i называют нулями, а корни полинома знаменателя λ_i — *полюсами системы РА*. Так как коэффициенты передаточной функции — действительные числа, то невещественные нули и полюсы могут быть только комплексно-сопряженными величинами. При анализе систем РА нули и полюсы (*особенности передаточной функции*) удобно изображать точками на плоскости комплексного переменного p (рис. 2.1). Если передаточная функция системы не содержит особенностей в правой части плоскости p , то систему называют *минимально-фазовой*, в противном случае ее считают *неминимально-фазовой*.

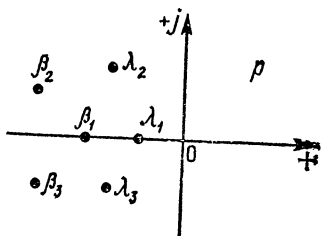


Рис. 2.1. Расположение нулей и полюсов передаточной функции на плоскости комплексного переменного

§ 2.3. ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИИ

Рассмотрим случай, когда на систему РА действует единичный сигнал

$$x(t) = 1(t), \quad (2.7)$$

где $1(t)$ — единичная функция, удовлетворяющая условию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Преобразование Лапласа для выходного сигнала системы в соответствии с выражением (2.5) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$Y(p) = W(p)/p. \quad (2.8)$$

Переходный процесс в системе РА, вызванный входным сигналом в виде единичной функции, называют *переходной функцией*:

$$h(t) = L^{-1}[W(p)/p], \quad (2.9)$$

где $1/p$ — преобразование Лапласа для единичной функции.

Переходная функция вычисляется по формуле обращения

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{i=0}^n \operatorname{Res} \frac{W(p)}{p} e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i}, \quad (2.10)$$

где λ_i — полюсы подынтегрального выражения; n — число полюсов.

Напомним, что вычет в простом полюсе вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res} W(p) \frac{e^{pt}}{p} \Big|_{p=\lambda_i} = \lim_{p \rightarrow \lambda_i} (p - \lambda_i) W(p) \frac{e^{pt}}{p}, \quad (2.11)$$

а в полюсе кратности k

$$\operatorname{Res} W(p) \frac{e^{pt}}{p} \Big|_{p=\lambda_i^k} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} (p - \lambda_i)^k W(p) \frac{e^{pt}}{p}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим случай, когда на невозмущенную систему РА действует единичный мгновенный импульс или,

что то же самое, сигнал вида δ -функции

$$x(t) = \delta(t), \quad (2.13)$$

который, как известно, удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \quad (2.14)$$

Так как преобразование Лапласа для δ -функции равно единице, то для выходного сигнала

$$Y(p) = W(p) L[\delta(t)] = W(p). \quad (2.15)$$

Переходный процесс, возникающий в системе РА при действии единичного импульса, называют *импульсной переходной функцией*. Из выражения (2.15) следует, что

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = \sum_{i=1}^n \text{Res } W(p) e^{p t} |_{p=\lambda_i} \quad (2.16)$$

Импульсная переходная функция системы РА удовлетворяет следующим условиям:

$$w(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad \int_0^{\infty} |w(t)| dt < \infty. \quad (2.17)$$

Первое условие называют *условием физической реализуемости системы*; оно показывает, что в реальной системе переходный процесс не может возникнуть раньше подачи на вход системы единичного импульса. Второе условие является условием устойчивости системы РА.

Согласно выражениям (2.9) и (2.15),

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t). \quad (2.18)$$

Интервал времени, на котором импульсная переходная функция отлична от нуля, называют *памятью системы* (рис. 2.2, а).

Ранее определена импульсная переходная функция стационарной системы РА. В таких системах импульсная переходная функция зависит только от разности времени наблюдения выходного сигнала и времени приложения к входу системы сигнала δ -функции. В нестационарных системах РА импульсная переходная функция зависит не только от времени наблюдения, но и от времени возникновения входного сигнала (это происходит из-за изменения во времени параметров системы). Если на вход не-

стационарной системы подать в момент времени $\tau_2 > \tau_1$ сигнал вида δ -функции, то импульсная переходная функция не только сдвинется по времени, как в случае стационарных систем (рис. 2.2, а), но и изменится по форме (рис. 2.2, б).

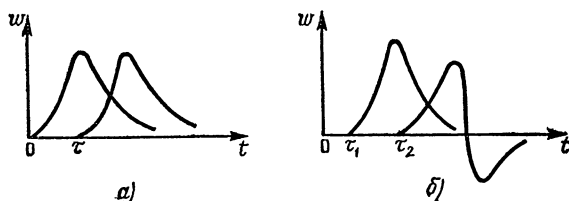


Рис. 2.2. Импульсные переходные функции:
а — стационарной системы; б — нестационарной системы

Условие физической реализуемости для нестационарных систем РА имеет вид

$$w(t\tau) = 0 \text{ при } t < \tau. \quad (2.19)$$

Пример 2.1. Определить переходную и импульсную переходную функции системы РА с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Решение. Преобразование Лапласа для переходной функции находится по формуле (2.8):

$$H(p) = \frac{b_0}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)},$$

где λ_1, λ_2 — полюсы системы; b_0 — постоянный коэффициент. В соответствии с выражением (2.10)

$$h(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}.$$

Импульсная переходная функция, согласно (2.16),

$$w(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} [e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}].$$

Импульсную переходную функцию можно вычислить и по формуле (2.18).

§ 2.4. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ СИСТЕМЫ РА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Из определения передаточной функции системы РА следует, что преобразование Лапласа для выходного сигнала при нулевых начальных условиях $Y(p) = W(p) X(p)$.

На основании теоремы свертки сигнал на выходе

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

В нестационарных системах РА

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) w(t, \tau) d\tau, \quad (2.21)$$

где t_0 — время подачи входного сигнала.

Выражения (2.20) и (2.21) позволяют определить выходной сигнал системы РА при произвольном виде входных сигналов.

§ 2.5. КОМПЛЕКСНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим случай, когда на вход системы РА действует гармонический сигнал с амплитудой X_m и частотой ω :

$$x(t) = X_m \sin \omega t. \quad (2.22)$$

Сигнал на выходе системы при нулевых начальных условиях в соответствии с выражением (2.5) имеет вид

$$Y(p) = W(p) X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \frac{X_m \varphi}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.23)$$

Изображению (2.23) соответствует оригинал

$$y(t) = X_m \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \sin \omega t + X_m \sum_{i=1}^n \text{Res } Y(p) e^{pt}|_{p=\lambda_i}. \quad (2.24)$$

В устойчивой системе все полюсы имеют отрицательные вещественные части, поэтому в установившемся режиме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = W(j\omega) X_m \sin \omega t = W(j\omega) x(t), \quad (2.25)$$

т. е. на выходе системы также получается гармонический сигнал, частота которого равна частоте входного сигнала.

Отношение гармонического сигнала на выходе в установившемся режиме к гармоническому сигналу на входе называют *комплексным коэффициентом передачи* или *частотной характеристикой системы РА*. Из выражения (2.25) следует, что

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega}. \quad (2.26)$$

Частотная характеристика системы РА может быть представлена в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.27)$$

где $P(\omega)$ — вещественная частотная характеристика; $Q(\omega)$ — мнимая частотная характеристика.

Частотная характеристика системы РА в показательной форме имеет вид

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.28)$$

где $|W(j\omega)| = [P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2}$ — амплитудно-частотная характеристика; $\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ — фазочастотная характеристика.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) определяет зависимость от частоты отношения амплитуды сигнала на выходе системы к амплитуде сигнала на входе. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) устанавливает зависимость сдвига фаз между входным и выходным сигналами.

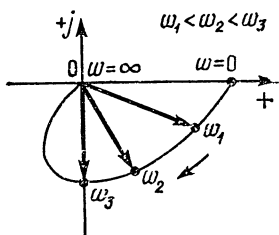


Рис. 2.3. Годограф частотной характеристики системы РА

На плоскости комплексного переменного частотная характеристика изображается в виде вектора (рис. 2.3), который при изменении частоты от нуля до бесконечности описывает кривую, называемую *амплитудно-фазовой характеристикой* или *годографом частотной характеристики системы РА*.

В инженерной практике применяют *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ). Логарифмическая АЧХ

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (2.29)$$

При построении логарифмической АЧХ (рис. 2.4) по

оси ординат откладывают значение (2.29) в децибелах, а по оси абсцисс — частота ω в логарифмическом масштабе.

При построении логарифмической ФЧХ по оси ординат откладывают ее значения в радианах. Основным до-

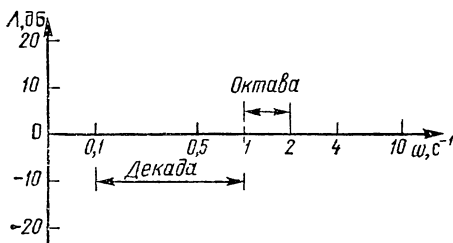


Рис. 2.4. К описанию ЛЧХ

стоинством ЛЧХ является возможность их построения без вычислений.

Десятикратное изменение частоты называют *изменением на декаду*, а двукратное — *изменением на октаву*. Число декад и октав в заданном диапазоне частот ω_1 — ω_2 вычисляют по формулам

$$N_d = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} ; \quad N_{ок} = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{1}{\lg 2} \approx 3,33 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} . \quad (2.30)$$

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

1. Дайте определение основных характеристик систем РА.
2. Как по дифференциальному уравнению системы РА найти ее передаточную функцию?
4. Что такое условие физической реализуемости системы РА?
5. Какие частотные характеристики используются для исследования систем РА?
6. Чем отличаются импульсные переходные функции стационарных и нестационарных систем РА?
7. Почему ЛЧХ нашли большое применение в технике?

ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

§ 3.1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ РА

Исходными уравнениями для анализа систем РА являются дифференциальные уравнения ее элементов, которые составляются на основании их принципов работы. В большинстве случаев эти уравнения оказываются нелинейными, что усложняет анализ систем. Поэтому всегда, когда это возможно, стремятся провести линеаризацию характеристик нелинейных устройств. Линеаризацию производят по формуле Тейлора, в соответствии с которой разложение нелинейной функции двух аргументов имеет вид

$$y = F(x, z) = F(x_0, z_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta z + \\ + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta x^2 + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta z^2 + R_{n+1}, \quad (3.1)$$

где x_0, z_0 — постоянные установившихся значений, входных переменных x и z ; $\Delta x, \Delta z$ — малые отклонения от установившихся значений x и z ; R_{n+1} — остаточный член.

При работе устройств в составе системы РА отклонения Δx и Δz малы, поэтому в выражении (3.1) можно ограничиться только первыми порядками отклонений этих переменных. В этом случае из (3.1) следует, что приращение выходного сигнала

$$\Delta y = y - F(x_0, y_0) = k_x \Delta x + k_z \Delta z, \quad (3.2)$$

где $k_x = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} ; \quad k_z = \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}$

— коэффициенты передачи.

Выражение (3.2) и является линеаризованным уравнением элемента. В общем случае это уравнение содержит не только отклонения переменных, но и их производные, т. е. в результате линеаризации получается дифференциальное уравнение, преобразование Лапласа которого определяет передаточную функцию линеаризованного элемента системы РА.

Далее рассматривают уравнения основных устройств системы РА и определяются их передаточные функции.

§ 3.2. ФАЗОВЫЕ ДЕТЕКТОРЫ

Фазовым детектором (ФД) называют устройство (рис. 3.1, а), предназначенное для преобразования разности фаз двух синусоидальных колебаний одинаковой частоты

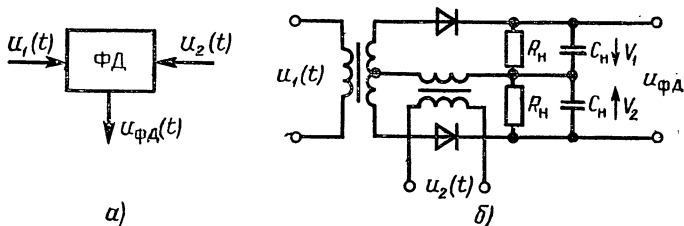


Рис. 3.1. Функциональная (а) и принципиальная (б) схемы фазового детектора

в напряжение. Основной характеристикой ФД является зависимость выходного напряжения от разности фаз $u_{\text{фд}} = F(\varphi)$, где φ — разность фаз напряжений. Функция F периодическая, так что $u_{\text{фд}} = F(\varphi + k2\pi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

В системах РА применяются ФД двух типов: *балансные (векторомерные)* и *параметрические*. Наиболее часто используют балансные ФД, которые эффективно работают в области как самых низких, так и высоких частот. Схема балансного ФД показана на рис. 3.1, б, выходное напряжение образуется из векторной суммы и разности двух напряжений: опорного $u_1(t) = u_1 \sin \omega t$ и сигнала

$$u_2(t) = U_2 \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.3)$$

Сумма и разность этих напряжений определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_1(t) + u_2(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \\ u_1(t) - u_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= [U_1^2 + 2U_1 U_2 \cos \varphi + U_2^2]^{1/2}; \\ A_2 &= [U_1^2 - 2U_1 U_2 \cos \varphi + U_2^2]^{1/2}; \end{aligned}$$

$$\psi_1 = \arctg \frac{U_2 \sin \varphi}{U_1 + U_2 \cos \varphi}; \quad \psi_2 = -\arctg \frac{U_2 \sin \varphi}{U_1 - U_2 \cos \varphi}.$$

В статическом режиме напряжение на выходе ФД, как это следует из рис. 3.1, б, определяется выражением

$$u_{\text{фд}} = V_1 - V_2 = k_{\text{д}}(A_1 - A_2) \approx 2k_{\text{д}} \frac{U_1 U_2 \cos \varphi}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}},$$

где $k_{\text{д}}$ — коэффициент детектирования.

При $U_1 > U_2$

$$u_{\text{фд}} = 2k_{\text{д}} U_2 \cos \varphi = k \cos \varphi. \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) приближенное, оно тем более справедливо, чем больше напряжение U_1 напряжения U_2 , так, при $U_1 = 5U_2$ максимальная ошибка вычисления $u_{\text{фд}}$ не превышает двух процентов.

Если напряжение (3.3) сдвинуто по фазе относительно опорного на $\pi/2$, то из (3.4) следует, что $u_{\text{фд}} = -2k_{\text{д}} U_2 \sin \varphi$.

Проведем линеаризацию нелинейного уравнения (3.4). В соответствии с (3.2)

$$u_{\text{фд}} = k [\cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \Delta \varphi],$$

где φ_0 — значение фазы в установившемся режиме. При малых отклонениях фазы от φ_0 приращение напряжения на выходе ФД

$$\Delta u_{\text{фд}} = u_{\text{фд}} - k \cos \varphi_0 = k_{\text{фд}} \Delta \varphi,$$

где $k_{\text{фд}} = -k \sin \varphi_0$ — коэффициент передачи ФД.

Из последнего выражения следует, что передаточная функция ФД $W_{\text{фд}}(p) = k_{\text{фд}}$. Если учесть инерционность однополупериодных выпрямителей, то передаточная функция ФД

$$W_{\text{фд}}(p) = \frac{k_{\text{фд}}}{1 + pT_{\text{фд}}}, \quad (3.5)$$

где $T_{\text{фд}} = 4C_{\text{н}} / (R_{\text{н}} + R_i)$ — постоянная времени ФД; R_i — внутреннее сопротивление диода.

В параметрических ФД зависимость выходного напряжения от сдвига фаз аналогична выражению (3.4).

Найдем статистические характеристики ФД, когда на его вход воздействует помеха со случайной амплитудой и фазой. В этом случае

$$u_2(t) = u_{\text{п}}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_{\text{п}}).$$

Автокорреляционная функция сигнала на выходе ФД имеет вид [13]

$$R_{\text{фд}}(\tau) = 4k_d^2 R_{\text{п}}(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где $R_{\text{п}}(\tau)$ — автокорреляционная функция помехи на входе ФД.

Преобразование Фурье последнего выражения позволяет получить спектральную плотность шума на выходе ФД

$$S_{\text{фд}}(\omega) = 4k_d^2 [S_{\text{п}}(\omega_0 + \omega) + S_{\text{п}}(\omega_0 - \omega)].$$

Это выражение определяет известное свойство ФД: перенос спектра выходных колебаний на нулевые частоты (рис. 3.2).

Спектральная плотность на частоте, равной нулю, $S_{\text{фд}}(0) = 8k_d^2 S_{\text{п}}(\omega_0)$. Из последних выражений следует, что статистические характеристики сигнала на выходе ФД не зависят от разности фаз сигнала и опорного напряжения.

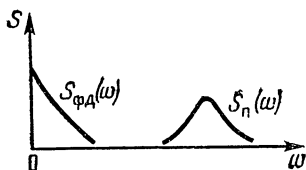


Рис. 3.2. К пояснению переноса спектра колебаний

§ 3.3. ЧАСТОТНЫЕ ДИСКРИМИНАТОРЫ

Дискриминаторы предназначены для измерения сигнала рассогласования и преобразования его в постоянное или переменное напряжение. Различают частотные угловые и временные дискриминаторы.

Частотные дискриминаторы (ЧД) — это устройства, выходные напряжения которых зависят от отклонения частоты входных сигналов от переходной частоты: $u_{\text{чд}} = F(\omega - \omega_0)$, где ω_0 — переходная частота.

По способу задания переходной частоты ЧД подразделяют на две группы. В дискриминаторах первой группы переходная частота определяется настройкой эталонного фильтра (колебательного контура). В ЧД второй группы переходная частота равна частоте колебаний напряжения с эталонного генератора.

На рис. 3.3 изображена схема наиболее распространенного ЧД первой группы с фазовым детектором. В таком ЧД входной сигнал разделяется на две составляющие u_1 и u_2 , сдвиг фаз между которыми при точной настройке контура на переходную частоту равен $\pi/2$. При отклонении частоты входного сигнала от переходной сдвиг фаз

изменяется в соответствии с фазовой характеристикой резонансного контура. Одновременно с этим уменьшается амплитуда напряжения $U_2(t)$. В результате чего изменяется напряжение на выходе ЧД. Схеме ЧД, пока-

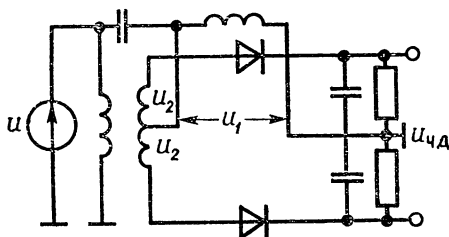


Рис. 3.3. Схема частотного дискриминатора с фазовым детектором

занной на рис. 3.3, соответствует структурная схема ЧД, изображенная на рис. 3.4, где ФВ — фазовращатель, сдвигающий фазу сигнала на $\pi/2$; Ф — резонансный фильтр.

Непосредственно из схемы рис. 3.4 следует, что на ФД подаются напряжения

$$u_1(t) = u(t) = U_c \sin [(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi];$$

$$u_2(t) = U_c |jW_\Phi(j\Delta\omega)| \sin [(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi + \frac{\pi}{2} + \varphi_\Phi(\Delta\omega)]$$

где $\Delta\omega$ — отклонение частоты напряжения от переходной частоты; $\varphi_\Phi(\Delta\omega)$ — фазовый сдвиг, создаваемый фильтром; $|jW_\Phi(j\Delta\omega)|$ — амплитудно-частотная характеристика фильтра.

В соответствии с выражением (3.4) напряжение на выходе ЧД

$$u_{чд} = 2k_d U_c |W_\Phi(j\Delta\omega)| \sin \varphi_\Phi(\Delta\omega) = 2k_d U_c \operatorname{Im} W_\Phi(j\Delta\omega), \quad (3.6)$$

где $\operatorname{Im} W_\Phi(j\Delta\omega)$ — мнимая частотная характеристика фильтра.

Выражение (3.6) определяет *дискриминационную характеристику* ЧД, обычно используется нормированная характеристика $F(\varphi) = u_{чд}/u_c = 2k_d \operatorname{Im} W_\Phi(j\Delta\omega)$. На

рис. 3.5 показан вид дискриминационной характеристики ЧД, из которой видно, что при малых значениях расстройки характеристику можно считать линейной и представить в виде $F(\varphi) = k_{\text{чд}} \Delta\omega$, где $k_{\text{чд}}$ — коэффициент передачи частотного дискриминатора. Из этого выражения следует, что передаточная функция ЧД $W_{\text{чд}}(p) = k_{\text{чд}}$.

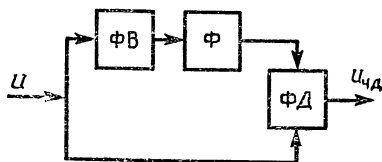


Рис. 3.4. Структурная схема частотного дискриминатора

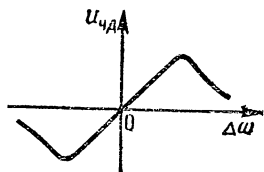


Рис. 3.5. Дискриминационная характеристика частотного дискриминатора

Выражение для передаточной функции справедливо в том случае, когда полоса пропускания ЧД намного шире спектра его входного сигнала, в противном случае необходимо учитывать инерционность ЧД, которая определяется постоянной времени детектора.

В системах РА используются и ЧД с рассмотренными контурами, характеристики которых близки к характеристикам рассмотренного ЧД с фазовращателем.

§ 3.4. УГЛОВЫЕ ДИСКРИМИНАТОРЫ

Угловые дискриминаторы (пеленгаторы) используются в системах автоматического сопровождения по направлению для измерения рассогласования между продольной осью антенны РЛС и направлением на движущуюся цель и преобразования этого рассогласования в электрическое напряжение. Различают два вида угловых дискриминаторов: с *коническим сканированием диаграммы направленности* (с последовательным сравнением сигналов) и *моноимпульсные* (с мгновенным сравнением сигналов).

В дискриминаторе с коническим сравнением антенной РЛС формируется одна сканирующая (вращающаяся) диаграмма направленности, максимум которой смещен от продольной оси антенны (рис. 3.6, а). Если направле-

ние на цель совпадает с продольной осью антенны Ox_A , то цель облучается импульсами одной и той же мощности, поэтому амплитуда отраженных от нее импульсов будет постоянной. Если направление на цель не совпадает с продольной осью антенны, то в моменты времени, раз-

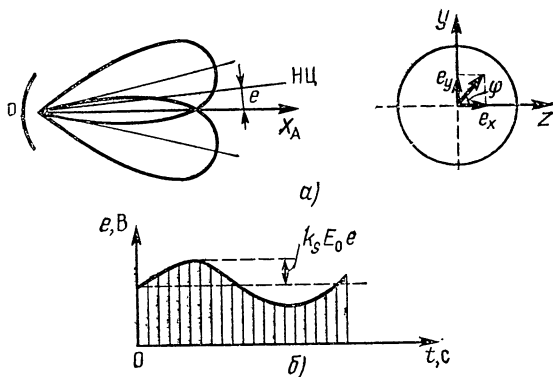


Рис. 3.6. К пояснению принципа конического сканирования:

a — определение составляющих ошибок; b — выделение сигнала ошибок

деленные интервалом времени, равном половине периода сканирования, отраженные от цели импульсы будут иметь различные амплитуды, т. е. будет осуществляться модуляция отраженного сигнала по амплитуде с частотой сканирования. При небольших отклонениях направления на цель от продольной оси антенны модуляция будет линейной:

$$E(t) = E_0 [1 + k_s e \cos(\omega_{\text{ск}} t + \varphi)],$$

где $E(t)$ — амплитуда импульса, отраженного от цели и принятого в момент времени t ; E_0 — средняя амплитуда импульсов за период сканирования; k_s — постоянный коэффициент; $\omega_{\text{ск}}$ — частота сканирования; e — угловое рассогласование. Значение e характеризует отклонение направления на цель, а φ — знак этого отклонения.

Если $t=0$ при $\varphi=0$ (рис. 3.6, б), то можно записать, что

$$E(t) = E_0 [1 + k_s e \cos \varphi \cos \omega_{\text{ск}} t + k_s e \sin \varphi \sin \omega_{\text{ск}} t].$$

Сигнал $E(t)$ подается на два фазовых детектора, опорными напряжениями являются два синусоидальных на-

пряжения, сдвинутых относительно друг друга на 90° . Опорные напряжения снимаются с генератора, кинематически связанного с устройством вращения диаграммы направленности так, что частота вращения диаграммы направленности и генератора опорных напряжений одна и та же.

На выходе одного из фазовых детекторов возникает напряжение

$$u_{\text{фд1}} = k_{\text{фд}} k_s e \cos \varphi = k_{\text{уд}} e_x,$$

на выходе другого

$$u_{\text{фд2}} = k_{\text{фд}} k_s e \sin \varphi = k_{\text{уд}} e_y,$$

где $k_{\text{уд}}$ — коэффициент передачи углового дискриминатора.

Зависимость напряжения на выходе фазового детектора от сигнала рассогласования называется *пеленгационной характеристикой дискриминатора* (см. рис. 1.10, б).

Передаточная функция углового дискриминатора с учетом инерционности фазового детектора

$$W_{\text{уд}}(p) = \frac{k_{\text{уд}}}{1 + pT_{\text{фд}}}. \quad (3.7)$$

В угловом дискриминаторе с коническим сканированием прием отраженных импульсов происходит последовательно через промежутки времени, равные периоду сканирования. За этот промежуток времени сигнал из-за отражающих свойств цели изменяется (флуктуирует), что приводит к снижению точности измерения угла рассогласования.

В моноимпульсных угловых дискриминаторах прием отраженных от цели сигналов осуществляется одновременно четырьмя антеннами, две из которых предназначены для пеленгации цели в одной плоскости, а две другие — в другой. Так как в каждой плоскости используются по два независимых канала, то амплитудные флуктуации отраженного сигнала не влияют на точность измерения угла рассогласования.

В зависимости от способа обработки принятых сигналов моноимпульсные дискриминаторы подразделяются на фазовые, амплитудные и суммарно-разностные. Ограничимся рассмотрением фазового суммарно-разностного дискриминатора. В таком дискриминаторе направление на цель определяется путем сравнения фаз сигналов, принимаемых одновременно двумя антеннами. На рис. 3.7

показано, как осуществляется такое сравнение. Непосредственно из этого рисунка следует, что

$$R_1 = R + \frac{d}{2} \sin e, \quad R_2 = R - \frac{d}{2} \sin e,$$

где R_1, R_2 — расстояния от антенн до цели; d — расстояние между центрами антенн.

Разность расстояний $\Delta R = R_1 - R_2 = d \sin e$ позволяет найти разность фаз

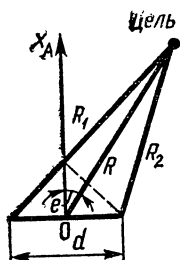
$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta R = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin e, \quad (3.8)$$

где λ — длина волны.

Согласно (3.8), угловое рассогласование определяется через разность фаз, принятых антеннами сигналов:

$$e = \arcsin \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda \Delta \varphi}{a}. \quad (3.9)$$

Рис. 3.7. К пояснению фазового метода пеленгации



ми антенн выбрать не больше диаметра антенны.

На рис. 3.8 показана функциональная схема фазового суммарно-разностного моноимпульсного дискриминатора. Сигналы, принятые антеннами, подаются на волновой мост (ВМ), с одного из выходов которого снимается суммарный сигнал, с другого — разностный. Эти сигналы поступают на преобразователи частоты, состоящие из

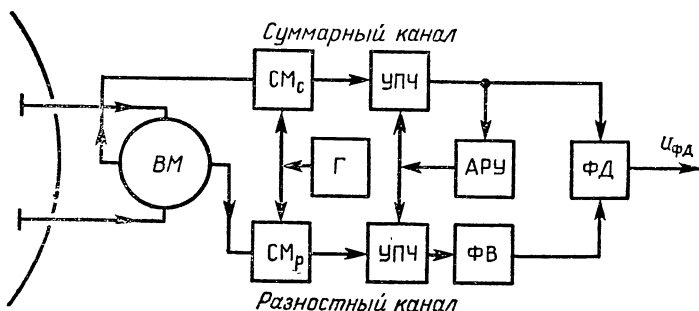


Рис. 3.8. Функциональная схема суммарно-разностного фазового дискриминатора

смесителей $СМ_c$, $СМ_p$ и гетеродина Г. На выходах смесителей образуются суммарный и разностный сигналы промежуточной частоты, которые усиливаются усилителями промежуточной частоты УПЧ. Для стабилизации уровней сигналов суммарного и разностного каналов в дискриминатор введено устройство автоматической регулировки усиления АРУ. Разностное напряжение поступает на фазовый детектор ФД, опорным сигналом которого является суммарное напряжение. Для обеспечения нормальной работы ФД в разностный канал включен фазовращатель ФВ. Напряжение на выходе ФД

$$u_{\text{ФД}} = k_{\text{ФД}} \frac{k_p}{k_c} \frac{\sin \Delta\varphi}{1 + \cos \Delta\varphi} = k_{\text{ФД}} \frac{k_p}{k_c} \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (3.10)$$

где k_p , k_c — коэффициенты усиления разностного и суммарного каналов.

С учетом выражения (3.8) по (3.10) получим

$$u_{\text{ФД}}(e) = k_{\text{ФД}} \frac{k_p}{k_c} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin e \right). \quad (3.11)$$

Временные дискриминаторы предназначены для измерения временных рассогласований между отраженными от цели импульсами и зондирующими импульсами и преобразования рассогласования в пропорциональное значение напряжения. Принцип работы временного дискриминатора рассмотрен в § 1.6. Здесь проанализируем связь выходного сигнала дискриминатора с входным сигналом, которым является временное рассогласование Δt (см. рис. 1.18). Временное рассогласование равно разности времени задержки отраженного от цели импульса t_R и времени задержки следящих импульсов $t_{\text{и}}$.

Во временном дискриминаторе вырабатываются два импульса, длительности которых определяются выражениями (1.29). После сглаживания этих импульсов образуется усредненная разность напряжений

$$u_{\text{вд}} = U_0 (\tau_1 - \tau_2) / T, \quad (3.12)$$

где U_0 — амплитуда импульсов.

Формула (3.12) справедлива при условии, что $|\Delta t| \ll$

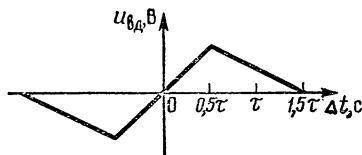


Рис. 3.9. Дискриминационная характеристика временного дискриминатора

$\leq \tau/2$. При $|\Delta t| > \tau/2$ напряжение $u_{\text{пл}}$ уменьшается и при $\Delta t = 1,5\tau$ становится равным нулю. На рис. 3.9 показана дискриминационная характеристика временного дискриминатора.

Система работает в условиях действия помех, поэтому при анализе их влияния на качественные характеристики системы необходимо учитывать нелинейную характеристику дискриминатора (см. гл. 12).

§ 3.5. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

В системах РА используются различные исполнительные устройства. В системах, предназначенных для регулирования электрических сигналов, например частоты напряжений в системах АПЧ, исполнительными устройствами являются электронные приборы. В системах РА, используемых для управления механическими устройствами, например антеннами РЛС, в качестве исполнительных устройств применяются электрические двигатели постоянного и переменного тока, электромагнитные порошковые муфты и другие устройства.

На рис. 3.10 показана схема двигателя, работающего на некоторую нагрузку (Н). Двигатель состоит из обмотки возбуждения ОВ, подключенной к источнику по-

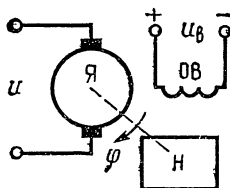


Рис. 3.10. Схема электрического двигателя постоянного тока

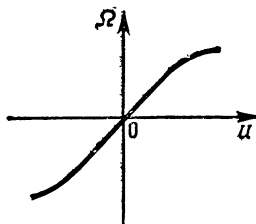


Рис. 3.11. Регулировочная характеристика электрического двигателя

стоянного тока, и обмотки якоря Я, на которую подается управляющее напряжение с усилителя мощности. Напряжение на обмотке якоря является входным сигналом двигателя, а угол поворота якоря выходным сигналом. Зависимость частоты вращения якоря Ω двигателя от входного напряжения u называют *регулирующей характеристикой* (рис. 3.11).

Передаточная функция двигателя определяется следующим выражением:

$$W_{\text{дв}}(p) = \frac{\Phi(p)}{U(p)} = \frac{k_{\text{дв}}}{p(1 + pT_{\text{м}})}, \quad (3.13)$$

где $\Phi(p)$ — преобразование Лапласа для угла отклонения якоря; $U(p)$ — преобразование Лапласа для отклонения напряжения на обмотке якоря от установившегося значения.

Коэффициент передачи $k_{\text{дв}}$ и электромеханическая постоянная времени $T_{\text{м}}$ двигателя определяются экспериментальным путем. Для нахождения коэффициента передачи необходимо снять регулировочную характеристику, угол наклона касательной к которой, проведенной в точке, соответствующей установившемуся режиму работы двигателя, позволяет найти коэффициент передачи.

Для измерения электромеханической постоянной времени $T_{\text{м}}$ необходимо снять осциллограмму изменения частоты вращения двигателя при скачкообразном изменении напряжения на обмотке якоря. Для этого нужно зарегистрировать напряжение с какого-либо датчика частоты вращения, механически соединенного с якорем двигателя. Время, в течение которого частота вращения двигателя изменится на значение, равное 0,63 от установившегося значения, равно электромеханической постоянной времени.

Передаточные функции электрических двигателей переменного тока описываются выражением (3.13). Исполнительные устройства с электромагнитными порошковыми муфтами рассмотрены в [6].

§ 3.6. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

Устройства систем РА, имеющие различное конструктивное исполнение и принципы работы, могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Устройства систем РА, классифицируемые по виду передаточных функций, называют *типовыми (основными) звеньями*. Различают семь типовых звеньев. Рассмотрим их основные характеристики.

Безынерционное звено. К числу таких звеньев относятся устройства с передаточной функцией $W(p) = k$, где k — коэффициент передачи звена. Амплитудная и фазовая характеристики звена: $|W(j\omega)| = k$, $\varphi(\omega) = 0$; передаточная функция $h(t) = k \cdot 1(t)$.

Примерами таких звеньев являются потенциометр, полупроводниковый усилитель, зубчатая передача и т. п.

Инерционное звено. К подобным звеньям относятся устройства с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT}. \quad (3.14)$$

Пример инерционных звеньев — RC -цепочка, изображенная на рис. 3.12. Частотная характеристика инерционного звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}.$$

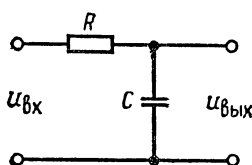


Рис. 3.12. Схема RC -цепи инерционного звена

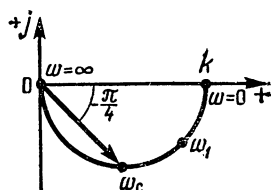


Рис. 3.13. Годограф частотной характеристики инерционного звена

Вещественная и мнимая частотные характеристики:

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2},$$

амплитудная и фазовая характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T. \quad (3.15)$$

На рис. 3.13 изображен годограф частотной характеристики инерционного звена, где $\omega_c = 1/T$ — сопряженная частота.

Переходная функция звена в соответствии с (2.10) имеет вид

$$h(t) = k[1(t) - e^{-t/T}].$$

Импульсная переходная функция находится по формуле (2.16).

Интегрирующее звено. К числу таких звеньев относятся устройства с передаточной функцией

$$W(p) = k/p. \quad (3.16)$$

Примеры интегрирующего звена: электрический двигатель с передаточной функцией (3.13), если в ней пренебречь электромеханической постоянной времени; усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления, в цепь обратной связи которого включен конденсатор.

Вещественная мнимая и частотные характеристики:

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -k/\omega;$$

амплитудная и фазовая

$$|W(j\omega)| = k/\omega; \quad \varphi(\omega) = -\pi/2. \quad (3.17)$$

На рис. 3.14 показан годограф частотной характеристики интегрирующего звена. Переходная и импульсная переходная функции звена следующие: $h(t) = kt \cdot 1(t)$; $w(t) = k \cdot 1(t)$.

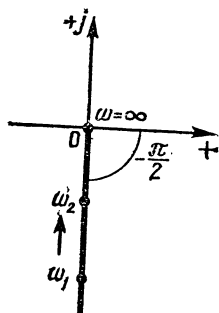


Рис. 3.14. Нюмограф частотной характеристики интегрирующего звена

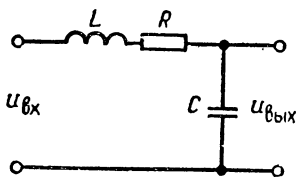


Рис. 3.15. Схема электрической цепи колебательного звена

Колебательное звено. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p^2 T^2 + 2\xi p T + 1}, \quad (3.18)$$

где ξ — относительный коэффициент затухания.

Примером колебательного звена является контур, состоящий из индуктивной катушки, резистора и конденсатора (рис. 3.15).

Амплитудная и фазовая частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}; \quad (3.19)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}.$$

На рис. 3.16 изображен годограф частотной характеристики звена.

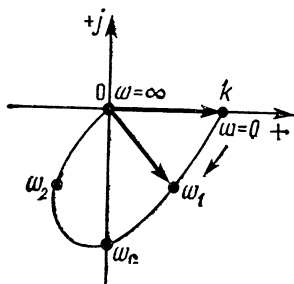


Рис. 3.16. Годограф частотной характеристики колебательного звена

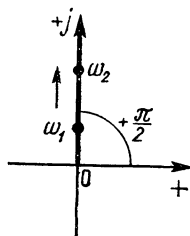


Рис. 3.17. Годограф частотной характеристики дифференцирующего звена

Переходная функция звена в соответствии с (2.10)

$$h(t) = k \left[1(t) - e^{-\xi t/T} \left(\frac{\xi}{b} \sin \frac{b}{T} t + \cos \frac{b}{T} t \right) \right],$$

где $b = \sqrt{1 - \xi^2}$.

Если $\xi > 1$, то полюсы передаточной функции (3.18) — отрицательные действительные числа, поэтому передаточную функцию звена можно представить в следующем виде:

$$W(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)},$$

где $T_1 = 1/\lambda_1$; $T_2 = 1/\lambda_2$.

Идеальное дифференцирующее звено. Передаточная функция звена $W(p) = kp$ не удовлетворяет условиям физической реализуемости, поэтому звено называется идеальным. Частотные характеристики звена $|W(j\omega)| = k\omega$; $\varphi(\omega) = \pi/2$. На рис. 3.17 изображен годограф частотной характеристики звена. Переходная функция звена $h(t) = k\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта функция.

Дифференцирующее звено первого порядка. Передаточная функция звена $W(p) = k[1 + pT]$.

Частотные характеристики: $|W(j\omega)| = k \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$; $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T$.

Годограф частотной характеристики показан на рис. 3.18, переходная функция звена $h(t) = k[1(t) + T\delta(t)]$.

Звено запаздывания. Это звено не искажает формы входного сигнала, а сдвигает его по времени. Передаточная функция звена

$$W(p) = e^{-pT},$$

где T —время запаздывания. Частотные характеристики: $|W(j\omega)| = 1$; $\varphi(\omega) = -\omega T$.

На рис. 3.19 изображен годограф частотной характеристики звена.

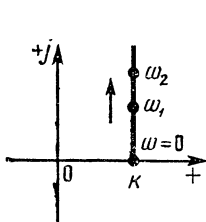


Рис. 3.18. Годограф частотной характеристики форсирующего звена

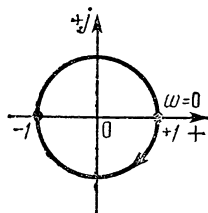


Рис. 3.19. Годограф частотной характеристики звена запаздывания

§ 3.7. ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Инерционное звено. Логарифмическая АЧХ звена в соответствии с выражениями (2.29) и (3.15)

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (3.20)$$

Предварительно построим приближенную характеристику. С этой целью в диапазоне частот от 0 до сопряженной частоты $\omega_c = 1/T$ пренебрежем в выражении (3.20) слагаемым, зависящим от частоты, так как оно меньше единицы. В результате получим $\Lambda_1(\omega) = 20 \lg k$.

На рис. 3.20, а этому выражению соответствует прямая линия, параллельная оси частот. На частотах больших сопряженной частоты ω_c пренебрежем единицей. Тогда формула (3.20) приобретает вид $\Lambda_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T$. Так как частота по оси абсцисс откладывается в логарифмическом масштабе, то этому выражению соответствует прямая линия с наклоном -20 дБ/дек.

Характеристику, составленную из прямолинейных отрезков $\Lambda_1(\omega)$ и $\Lambda_2(\omega)$, называют *асимптотической*. Наибольшее отклонение асимптотической характеристики от точной получается на сопряженной частоте; оно равно

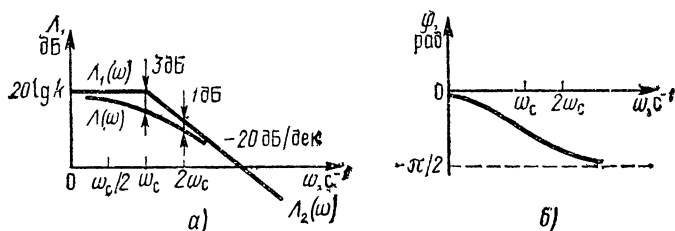


Рис. 3.20. ЛЧХ инерционного звена:

а — амплитудная; б — фазовая

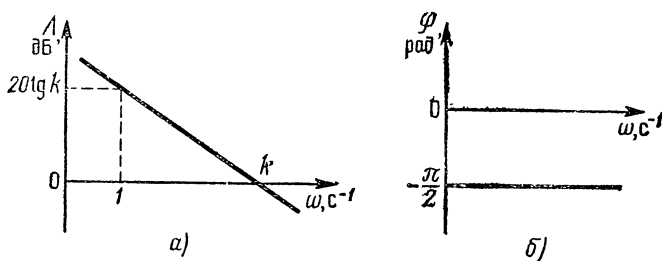


Рис. 3.21. ЛЧХ интегрирующего звена

—3 дБ. На частотах, отличающихся от сопряженной на одну октаву, отклонение составляет —1 дБ.

Логарифмическую ФЧХ (рис. 3.20, б) инерционного звена строят в соответствии с выражением (3.15).

Интегрирующее звено. Логарифмическая АЧХ звена с учетом (2.29) и (3.17) определяется выражением

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

На рис. 3.21, а этому уравнению соответствует прямая линия с наклоном —20 дБ/дек. Логарифмическая ФЧХ (3.17) не зависит от частоты и равна $-\pi/2$ (рис. 3.21, б).

Колебательное звено. С учетом (3.19) логарифмическая АЧХ звена

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Приближенная характеристика звена состоит из двух участков. На участке до сопряженной частоты $\Lambda_1(\omega) = 20 \lg k$, в диапазоне частот больше сопряженной $\Lambda_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T$. На графике характеристике $\Lambda_1(\omega)$ соответствует прямая линия с наклоном 0 дБ/дек, а характеристике $\Lambda_2(\omega)$ — прямая с наклоном -40 дБ/дек (рис. 3.22, а, б). Максимальное отклонение

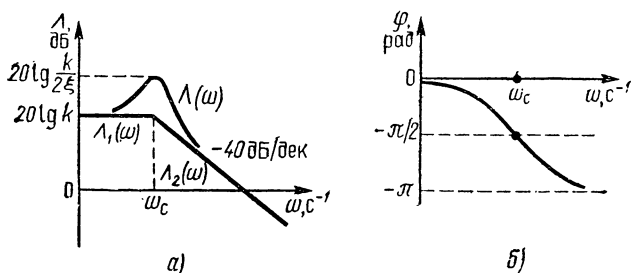


Рис. 3.22. ЛЧХ колебательного звена:
а — амплитудная; б — фазовая

точной характеристики от приближенной получается на сопряженной частоте, оно равно $-20 \lg \xi$. Уточнение приближенной характеристики производится расчетным путем.

Логарифмическую ФЧХ строят в соответствии с выражением (3.19). Аналогичным образом строят логарифмические характеристики и других типовых звеньев.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

1. По каким признакам классифицируются типовые звенья?
2. Определите основные характеристики типовых звеньев.
3. Каким образом линеаризуются характеристики устройств систем РА?
4. Как экспериментальным путем определяются коэффициенты передачи устройств систем РА?
5. Зависят ли коэффициенты устройств систем РА от значения переменных в установившемся режиме?
6. Постройте логарифмические частотные характеристики типовых звеньев.

ГЛАВА 4

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 4.1. ВИДЫ СОЕДИНЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ В СИСТЕМАХ РА

Структурная схема системы РА, состоящая из типовых звеньев, позволяет без сложных математических вычислений находить передаточные функции различных систем РА.

В системах РА встречаются три вида соединений звеньев: последовательное, параллельное и соединение звеньев по схеме с обратной связью.

Последовательное соединение типовых звеньев изображено на рис. 4.1. В соответствии с определением передаточной функции можно записать, что

$$W_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)}; \quad W_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Y_1(p)}, \dots, \quad W_n(p) = \frac{Y(p)}{Y_{n-1}(p)}.$$

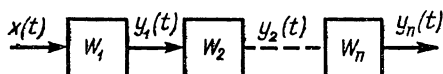


Рис. 4.1. Последовательное соединение звеньев

Перемножив передаточные функции, получим

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p). \quad (4.1)$$

Таким образом, передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций звеньев.

Частотная характеристика последовательно соединенных звеньев

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.2)$$

где $|W(j\omega)| = |W_1(j\omega)| |W_2(j\omega)| \dots |W_n(j\omega)|$;

$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$.

Логарифмическая АЧХ звеньев, соединенных после-

довательно, согласно (2.29),

$$\Lambda(\omega) = \Lambda_1(\omega) + \Lambda_2(\omega) + \dots + \Lambda_n(\omega). \quad (4.3)$$

Следовательно, логарифмическая АЧХ звеньев, соединенных последовательно, равна сумме логарифмических АЧХ отдельных звеньев. Это существенно упрощает построение логарифмических частотных характеристик по сравнению с обычными характеристиками.

На рис. 4.2 изображено *параллельное соединение* звеньев, на вход которых подается один и тот же сигнал, а выходные сигналы суммируются. Так как

$$Y_1(p) = W_1(p) X(p), \quad Y_2(p) = W_2(p) X(p), \dots, Y_n(p) = W_n(p) X(p),$$

то

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)] X(p).$$

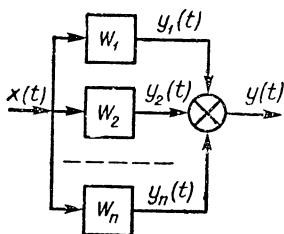


Рис. 4.2. Параллельное соединение звеньев

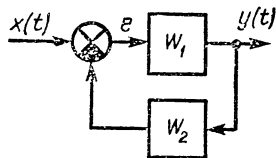


Рис. 4.3. Соединение звеньев по схеме с обратной связью

Таким образом, передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (4.4)$$

Частотная характеристика таких звеньев

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^n W_i(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega)$ — вещественная частотная харак-

теристика звеньев, соединенных параллельно; $Q(\omega) = \sum_{i=1}^n Q_i(\omega)$ — их мнимая частотная характеристика.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики звеньев, соединенных параллельно, определяются по формулам

$$|W(j\omega)| = [P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Для построения логарифмических частотных характеристик параллельно соединенных звеньев необходимо сначала найти амплитудную и фазовую частотные характеристики, а затем построить логарифмические частотные характеристики.

На рис. 4.3 показано соединение звеньев по схеме с обратной связью. На вход звена, охваченного обратной связью, подается сигнал рассогласования, для которого преобразование Лапласа

$$E(p) = X(p) - W_0(p)Y(p).$$

В соответствии с определением передаточной функции

$$Y(p) = W_1(p)E(p).$$

Исключив из последних двух уравнений $E(p)$, получим

$$Y(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_0(p)} X(p).$$

Следовательно, передаточная функция звеньев, соединенных по схеме с обратной связью,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_0(p)}. \quad (4.5)$$

Передаточная функция (4.5) найдена для случая отрицательной обратной связи. Если обратная связь положительная, то

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_0(p)}.$$

Частотные характеристики звеньев с обратной связью имеют вид

$$|W(j\omega)| = |W_1(j\omega)| [(1 + P_{10}(\omega))^2 + Q_{10}^2(\omega)]^{-1/2}; \quad (4.6)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \arctg \frac{Q_{10}}{1 + P_{10}(\omega)}, \quad (4.7)$$

где $P_{10}(\omega)$, $Q_{10}(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики звеньев, образующих замкнутый контур.

После вычисления частотных характеристик (4.6) и (4.7) могут быть построены их ЛЧХ.

§ 4.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

При анализе и синтезе систем РА, обобщенная структурная схема которых дана на рис. 1.20, использует следующие передаточные функции.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}. \quad (4.8)$$

Для системы, структурная схема которой показана на рис. 4.4, передаточная функция

$$W_p(p) = W_1(p) W_2(p).$$

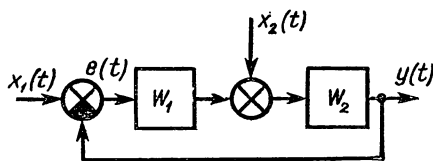


Рис. 4.4. Структурная схема системы

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (4.9)$$

Передаточную функцию замкнутой системы можно выразить через передаточную функцию разомкнутой системы с помощью выражения (4.5), в котором передаточную функцию обратной связи считают равной единице. В результате получают

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (4.10)$$

Передаточная функция замкнутой системы зависит от места приложения сигнала. Так, передаточная функция относительно сигнала $x_1(t)$ (рис. 4.4) определяется формулой (4.10), а относительно сигнала $x_2(t)$ выражением

$$W_{32}(p) = \frac{Y(p)}{X_2(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W(p)}. \quad (4.11)$$

Передаточная функция ошибки

$$W_e(p) = \frac{E(p)}{X(p)}. \quad (4.12)$$

Из уравнения замыкания системы $E(p) = X(p) - V(p)$ и выражения (4.9) следует, что $E(p) = [1 - W_3(p)]x(p)$.

Таким образом, передаточную функцию ошибки найдем с помощью передаточной функции замкнутой системы:

$$W_e(p) = 1 - W_3(p). \quad (4.13)$$

Подставив в последнее выражение формулу (4.10), получим

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}. \quad (4.14)$$

§ 4.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СТАТИЧЕСКИХ И АСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Как уже отмечалось, системы РА подразделяются на статические и астатические. В статических системах ошибка в установившемся режиме не равна (кривая 1 на рис. 4.5), а в астатических равна нулю (кривая 2 на рис. 4.5).

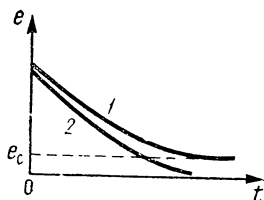


Рис. 4.5. К пояснению статической ошибки системы

Установим, какими особенностями должны обладать передаточные функции астатических систем РА относительно сигнала $x(t) = c \cdot 1(t)$. Согласно определению передаточной функции ошибки (4.12)

$$E(p) = W_e(p) X(p) = W_e(p) C/p.$$

Ошибка в установившемся режиме, называемая статической, на основании теоремы преобразования Лапласа о конечном значении функции

$$e_c = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} W_e(p) C. \quad (4.15)$$

Из выражения (4.15) следует, что статическая ошибка равна нулю, если передаточная функция ошибки содержит множитель p (имеет нуль в точке $p=0$), в противном случае статическая ошибка не равна нулю.

Аналогичным образом можно установить условия, при которых система РА является астатической относи-

тельно других видов сигналов. Оказывается, что передаточная функция ошибки системы с астатизмом порядка ν содержит множитель p^ν (имеет нуль порядка ν в точке $p=0$). В такой системе ошибка в установившемся режиме равна нулю при входном сигнале $x(t)=ct^{\nu-1}$. Из передаточной функции ошибки (4.14) следует, что система РА имеет порядок ν астатизма, если передаточная функция разомкнутой системы содержит ν интегрирующих звеньев (имеет полюс порядка ν в точке $p=0$).

Пример 4.1. Найти передаточные функции и ошибку в системе ФАПЧ (см. рис. 1.8), в которой ФНЧ описывается передаточной функцией $W_{\text{фнч}}(p) = k_{\text{ф}} \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1}$.

Решение. Все звенья в цепи сигнала ошибки от $\Delta\omega$ до ω_r включены последовательно, поэтому

$$W_p(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}})}, \quad (4.16)$$

где $K = k_{\text{фд}}k_{\text{ф}}k_{\text{уз}}k_{\text{пр}}$ — коэффициент передачи системы ФАПЧ; $T_{\text{фд}}$ — постоянная времени фазового детектора.

Передаточная функция замкнутой системы в соответствии с выражением (4.10)

$$W_{\text{з}}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}}) + K(1 + pT_2)}.$$

Передаточная функция ошибки определяется по (4.13)

$$W_e(p) = \frac{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}})}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}}) + K(1 + pT_2)}.$$

Из найденных передаточных функций следует, что система ФАПЧ имеет первый порядок астатизма, поэтому ее статическая ошибка равна нулю. При сигнале $\omega_s = ct$ ошибка определяется по (4.15):

$$e = \lim_{p \rightarrow 0} pW_e(p) \frac{c}{p^2} = \frac{c}{K}.$$

Это выражение определяет динамическую ошибку системы ФАПЧ

§ 4.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ

К многоконтурным относятся системы РА, в которых помимо замкнутого контура с главной обратной связью имеются контуры, образованные стабилизирующими обратными связями, введенными для придания системе нужных динамических характеристик. Передаточные функции таких систем находятся путем последовательного сведения структурной схемы многоконтурной системы к эквивалентной одноконтурной.

На рис. 4.6 изображена структурная схема двухконтурной системы РА. Для сведения такой системы к эквивалентной одноконтурной находят передаточную функцию внутреннего контура, которая в соответствии с выражением (4.5) имеет вид

$$W_{\text{БК}}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_0(p)}.$$

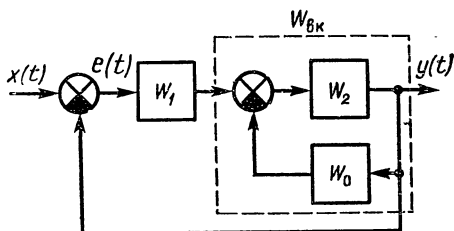


Рис. 4.6. Структурная схема двухконтурной системы

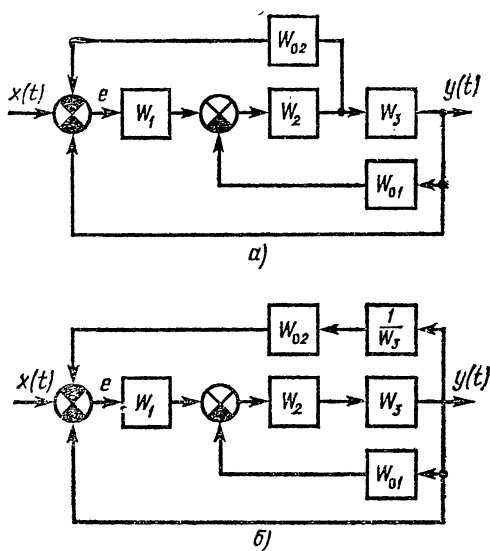


Рис. 4.7. Схемы моноконтурной системы:
а — с перекрестными обратными связями; б — с
неперекрестными обратными связями

После этого структурную схему системы можно представить как одноконтурную (рис. 4.6), для которой

$$W_p(p) = W_1(p) W_{BK}(p) = \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 + W_2(p) W_0(p)}.$$

На рис. 4.7, а дана структурная схема системы с перекрестными связями. Из этого рисунка видно, что несложными преобразованиями можно структурную схему системы привести к виду, в котором перекрестные связи отсутствуют (рис. 4.7, б). После таких преобразований передаточные функции находятся по методу последовательного свертывания двухконтурной системы к одноконтурной. Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 4.7, б)

$$W_p(p) = \frac{W_1(p) W_{BK}(p)}{1 + W_1(p) W_{BK}(p) W_3^{-1}(p) W_{02}(p)},$$

где $W_{BK}(p) = \frac{W_2(p) W_3(p)}{1 + W_3(p) W_3(p) W_{01}(p)}.$

§ 4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ

В ряде случаев передаточные функции и параметры устройств системы РА из-за их сложности не могут быть определены расчетным путем, поэтому приходится использовать различные экспериментальные методы. Определение характеристик как отдельных устройств, так и всей системы в целом по экспериментальным данным называют *задачей идентификации*. Известно большое число методов решения задачи идентификации. Выбор того или иного метода зависит от конкретных условий работы и априорных сведений о системе. В системах РА для идентификации параметров устройств широко применяют следующие методы: частотные, по переходным функциям и статистические.

Частотный метод идентификации базируется на логарифмических частотных характеристиках, построенных по экспериментальным данным. В соответствии с этим методом логарифмическая АЧХ аппроксимируется прямолинейными отрезками с наклонами, кратными ± 20 дБ/дек. Если характеристика до первой сопряженной частоты имеет наклон $-\nu 20$ дБ/дек, то исследуемое устройство содержит ν интегрирующих звеньев. Изменение наклона характеристики на какой-либо частоте на

$+k$ 20 дБ/дек означает, что идентифицируемое устройство содержит k форсирующих звеньев. Если наклон изменяется на $-k$ 20 дБ/дек, то исследуемый элемент имеет k инерционных или $k/2$ колебательных звеньев. Постоянные времени звеньев определяются через сопряженные частоты. Фазочастотная характеристика используется для более точной аппроксимации амплитудной характеристики прямолинейными отрезками.

Пример 4.2. Определить передаточную функцию устройства, экспериментальная логарифмическая АЧХ которого изображена на рис. 4.8.

Решение. Заменяя логарифмическую АЧХ прямолинейными отрезками, запишем

$$W(p) = \frac{K(1 + pT_1)}{p(1 + pT_2)(1 + pT_3)^2},$$

где $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$, $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$, $T_3 = \frac{1}{\omega_3}$ — постоянные времени; ω_1 , ω_2 ,

ω_3 — сопряженные частоты; K — коэффициент передачи устройства, определяемый по логарифмической АЧХ на частоте, равной единице; $\Lambda(1) = 20 \lg K$.

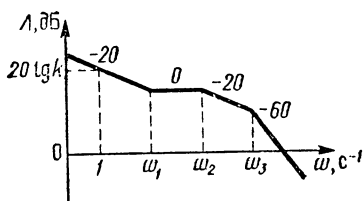


Рис. 4.8. Экспериментальная амплитудная ЛЧХ

Для идентификации параметров можно использовать и переходную функцию исследуемого устройства. Для этого необходимо зарегистрировать выходной сигнал устройства при скачкообразном входном сигнале. Далее следует найти передаточную функцию устройства. Это сложная задача, так как в устройствах с различными передаточными функциями могут быть сходные переход-

ные процессы. Поэтому данный метод целесообразно применять в тех случаях, когда передаточная функция известна и нужно только по экспериментальным данным найти параметры передаточной функции.

Статистические методы идентификации основываются на определении взаимной корреляционной функции выходного сигнала исследуемого устройства с его входным сигналом:

$$R_{yx} \tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) x(t - \tau) dt, \quad (4.17)$$

где $x(t)$ — стационарный случайный сигнал; $y(t)$ — выходной сигнал.

Если в качестве сигнала $x(t)$ принять белый шум интенсивностью N , то, согласно (2.14), из выражения (4.17) находят, что $R_{yx}(\tau) = N\omega(\tau)$, т. е. взаимная корреляционная функция оказывается равной импульсной переходной функции, по которой и рассчитывают параметры и передаточную функцию исследуемого устройства.

§ 4.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ

Дифференциальные уравнения широко используются при исследовании систем РА. Проще и удобнее составлять дифференциальные уравнения по структурной схеме системы. Рассмотрим методику определения дифференциальных уравнений систем РА на конкретном примере.

Пример 4.3. Найти дифференциальное уравнение системы АПЧ, структурная схема которой приведена на рис. 1.6.

Решение. Передаточные функции дискриминатора, фильтра нижних частот и гетеродина системы АПЧ описываются соответственно выражениями

$$W_{\text{чд}}(p) = \frac{K_{\text{чд}}}{1 + pT_{\text{чд}}}; \quad W_{\text{фнч}}(p) = \frac{K_{\text{фнч}}}{1 + pT_{\text{фнч}}};$$

$$W_{\text{г}}(p) = \frac{k_{\text{г}}}{1 + pT_{\text{г}}}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{р}}(p) = W_{\text{чд}}(p) W_{\text{фнч}}(p) W_{\text{г}}(p) = \frac{k}{(1 + pT_{\text{чд}})(1 + pT_{\text{фнч}})(1 + pT_{\text{г}})},$$

где $K = k_{\text{чд}}k_{\text{фнч}}k_{\text{г}}$ — коэффициент усиления системы.

Передаточная функция замкнутой системы в соответствии с формулой (4.10) имеет вид

$$W_{\text{з}}(p) = \frac{K}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

где $a_3 = T_{\text{чд}}T_{\text{фнч}}T_{\text{г}}$; $a_2 = T_{\text{чд}}T_{\text{фнч}} + T_{\text{чд}}T_{\text{г}} + T_{\text{фнч}}T_{\text{г}}$; $a_1 = T_{\text{чд}} + T_{\text{фнч}} + T_{\text{г}}$; $a_0 = 1 + K$.

Из последнего выражения следует, что дифференциальное уравнение системы АПЧ определяется выражением

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \Delta\omega_{\text{г}}(t) = K \Delta\omega_{\text{с}}(t),$$

где $p = d/dt$ — символ дифференцирования.

Аналогичным образом можно найти дифференциальные уравнения системы АПЧ относительно ошибки, для чего нужно использовать передаточную функцию ошибки.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

1. Какие способы соединений звеньев используются в системах РА?
 2. Дайте определения передаточных функций, применяемых в системах РА.
 3. Какие системы относятся к статическим системам, а какие к астатическим?
 4. Каким условиям должна удовлетворять передаточная функция замкнутой системы с астатизмом первого и второго порядков?
 5. Как находятся передаточные функции многоконтурных систем РА?
 6. Поясните, способы идентификации параметров элементов систем РА.
-

ГЛАВА 5

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от действующих воздействий. Процессы в системах РА описываются дифференциальными уравнениями вида

$$[1 + W_p(p)] y(t) = W_p(p) x(t), \quad (5.1)$$

где $p = d/dt$ — символ дифференцирования; $x(t)$, $y(t)$ — входной и выходной сигналы системы.

Решение уравнения (5.1) состоит из двух составляющих:

$$y(t) = y_v(t) + y_n(t), \quad (5.2)$$

где $y_v(t)$ — решение неоднородного уравнения; $y_n(t)$ — переходная составляющая решения.

Система РА устойчива, если переходная составляющая решения стремится к нулю. Это означает, что если система выведена из состояния равновесия каким-либо возмущением, то она возвращается в исходное состояние после устранения этого возмущения.

Переходная составляющая решения уравнения (5.1) зависит от корней характеристического уравнения, которое получают из выражения (5.1), приравняв левую часть нулю:

$$1 + W_p(p) = 0. \quad (5.3)$$

Переходная составляющая решения

$$y_{\text{п}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (5.4)$$

где λ_i — корни характеристического уравнения (полюсы системы); C_i — постоянные интегрирования.

Действительному корню характеристического уравнения λ_i в выражении (5.4) соответствует слагаемое $y_{\text{п}i}(t) = C_i e^{\lambda_i t}$. Если $\lambda_i < 0$, то переходная составляющая с ростом времени стремится к нулю, если $\lambda_i > 0$, то эта составляющая неограниченно возрастает (рис. 5.1, а).

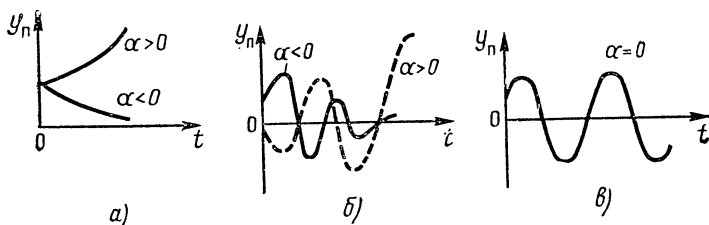


Рис. 5.1. К пояснению устойчивости системы РА:

а — переходные составляющие для вещественных корней; б — пары комплексно-сопряженных корней; в — пары мнимых корней

Паре комплексно-сопряженных корней уравнения (5.3) соответствует слагаемое

$$y_{\text{п}i}(t) = A_i e^{\gamma_i t} \sin(\beta_i t + \psi_i),$$

где $\gamma_i \pm j\beta_i$ — корни характеристического уравнения; A_i , ψ_i — постоянные интегрирования, определяемые через C_i .

При этом переходная составляющая стремится к нулю, если вещественные части корней отрицательны, в противном случае амплитуда колебаний переходной составляющей непрерывно возрастает (рис. 5.1, б).

Пара мнимых корней характеристического уравнения позволяет получить переходную составляющую в виде колебаний с постоянной амплитудой (рис. 5.1, в):

$$y_{\text{п}i}(t) = A_i \sin(\beta_i t + \psi_i).$$

Таким образом, для устойчивости системы РА необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные знаки, или эти кор-

ни на плоскости комплексного переменного были расположены слева от мнимой оси. Только при этом все слагаемые в выражении (5.4) будут стремиться к нулю.

Если корни характеристического уравнения расположены на мнимой оси, то система РА находится на *границе устойчивости*. При этом возможны два случая: корень в начале координат и пара мнимых корней. Нулевой корень появляется, когда свободный член характеристического уравнения равен нулю. Если остальные корни этого уравнения отрицательные, то система РА устойчива не относительно выходного сигнала, а относительно его производной, выходной сигнал в установившемся режиме имеет произвольное значение. Такие системы называют *нейтрально устойчивыми*. В том случае, когда характеристическое уравнение имеет пару мнимых корней, границу устойчивости называют *колебательной*.

В большинстве случаев корни характеристического уравнения системы вычислить невозможно, поэтому были разработаны *правила (критерии)*, позволяющие судить о расположении корней на плоскости комплексного переменного без их расчета. Прежде чем воспользоваться для оценки устойчивости тем или иным критерием, следует проверить выполнение *необходимого условия устойчивости*, в соответствии с которым все коэффициенты характеристического уравнения (5.1) должны быть больше нуля. Для доказательства этого положения представим уравнение (5.1) в виде

$$a_n(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n) = 0. \quad (5.5)$$

Если система устойчива, т. е. все корни λ_i отрицательные, то, раскрыв скобки (в (5.5)), получим уравнение с положительными коэффициентами. Если система неустойчива, т. е. хотя бы один из корней положительный, то, перемножив сомножители в (5.5), получим уравнение с несколькими отрицательными коэффициентами. В дальнейшем будем полагать, что необходимое условие устойчивости выполняется.

§ 5.2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

Для оценки устойчивости системы РА по критерию Гурвица необходимо из коэффициентов характеристического уравнения (5.1) составить матрицу Гурвица. С этой целью уравнение (5.1) запишем в виде

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{n-1}, & a_{n-3}, & a_{n-5}, \dots, & 0 \\ a_n, & a_{n-2}, & a_{n-4}, \dots, & 0 \\ 0, & a_{n-1}, & a_{n-3}, \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \dots, & \dots, & \dots, & a_0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Порядок составления матрицы Гурвица следующий. В левом верхнем углу матрицы записывается коэффициент a_{n-1} , по главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического уравнения с младшими индексами, над элементами главной диагонали записываются коэффициенты с убывающими индексами, под элементами — с возрастающими.

Для оценки устойчивости системы РА необходимо вычислить определители Гурвица, которые получают из матрицы (5.6) путем отчеркивания равного числа строк и столбцов в левом верхнем углу матрицы. Например, первый определитель

$$\Delta_1 = a_{n-1},$$

второй

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

третий

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Система РА устойчива, если при $a_n > 0$

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (5.7)$$

Раскрыв Δ_n по последнему столбцу, получим

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}. \quad (5.8)$$

Так как $a_0 > 0$, то для проверки устойчивости системы достаточно уточнить знаки только до Δ_{n-1} определителя.

Если определитель $\Delta_n = 0$, то система РА находится на границе устойчивости. Возможны два случая: 1) свободный член характеристического уравнения равен нулю, что соответствует нейтрально устойчивой системе; 2) определить $\Delta_{n-1} = 0$, что соответствует колебательной гра-

нице устойчивости. Из условия $\Delta_{n-1}=0$ можно определить параметры, при которых система РА находится на границе устойчивости. Например, можно вычислить критический коэффициент усиления $K_{кр}$, соответствующий границе устойчивости. Отношение

$$\alpha = K_{кр}/K \quad (5.9)$$

называют *запасом устойчивости по усилению*. Для нормального функционирования системы необходимо, чтобы $\alpha \geq 2$.

Пример 5.1. Найти условия устойчивости системы ФАПЧ (см. рис. 1.8), передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_p(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{фл})}. \quad (5.10)$$

Решение. Характеристическое уравнение системы ФАПЧ

$$T_1 T_{фл} p^3 + (T_1 + T_{фл}) p^2 + (1 + KT_2) p + K = 0.$$

Матрицу Гурвица можно представить так:

$$\begin{bmatrix} T_1 + T_{фл}, & K, & 0 \\ T_1 T_{фл}, & 1 + KT_2, & 0 \\ 0 & T_1 + T_{фл}, & K \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (5.7) условия устойчивости получаются следующими: $T_1 T_{фл} > 0$; $\Delta_1 = T_1 + T_{фл} > 0$; $\Delta_2 = (T_1 + T_{фл})(1 + KT_2) - KT_1 T_{фл} > 0$.

Первые два условия выполняются при любых значениях параметров, последнее — в том случае, когда

$$K < K_{кр} = \frac{T_1 + T_{фл}}{T_{фл}(T_1 - T_2) - T_1 T_2}.$$

Из этого выражения следует, что форсирующее звено улучшает устойчивость системы, повышает критический коэффициент усиления. Действительно, если при $T_2=0$ $K_{кр}=1/T_1+1/T_{фл}$, то при

$$T_2 = \frac{T_{фл} T_1}{T_{фл} + T_1} \quad K_{кр} = \infty.$$

§ 5.3. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Частотные критерии устойчивости базируются на принципе аргумента. Рассмотрим этот принцип, для чего запишем выражение для *характеристического вектора*, которое получим из характеристического уравнения (5.5) путем замены p на $j\omega$:

$$G(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)...(j\omega - \lambda_n). \quad (5.11)$$

На рис. 5.2 изображены сомножители характери-

ческого вектора. Определим изменение аргумента вектора $G(j\omega)$ при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$

$$\Delta \arg G(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - \lambda_i).$$

Если корень характеристического уравнения λ_i расположен на комплексной плоскости слева от мнимой оси, то вектор $j\omega - \lambda_i$ поворачивается на угол π , если этот корень находится на комплексной плоскости справа от мнимой оси, то вектор $j\omega - \lambda_i$ поворачивается на угол $-\pi$. Допустим, что m корней характеристического уравнения расположены справа от мнимой оси, а остальные $n-m$ корней — слева. Тогда изменение аргумента характеристического вектора равно $\Delta \arg G(j\omega) = (n-2m)\pi$. Это

выражение и определяет принцип аргумента. В устойчивой системе $m=0$, и изменение аргумента характеристического вектора получается следующим:

$$\Delta \arg G(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

Из выражения (5.12) следует критерий устойчивости Михайлова, согласно которому изменение аргумента характеристического вектора определяется по годографу вектора, который записывают в виде

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$, $V(\omega)$ — действительная и мнимая части характеристического вектора.

Система РА устойчива, если годограф характеристического вектора, начинаясь на положительной части действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении n квадрантов, где n — порядок характеристического уравнения системы.

Только в этом случае выполняется условие (5.12). На рис. 5.3, а—в, приведены примеры годографов для устойчивых и неустойчивых систем. Если годограф проходит через начало координат (рис. 5.3, в), то система находится на границе устойчивости. В этом случае

$$U(\omega_{кр}) = 0, \quad V(\omega_{кр}) = 0. \quad (5.13)$$

Из этих уравнений можно определить значения пара-

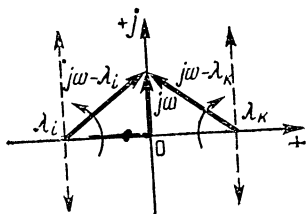


Рис. 5.2. К оценке изменения аргумента характеристического вектора

метров, при которых система находится на границе устойчивости.

Пример 5.2. Найти критическое значение коэффициента усиления которая рассматривалась в примере 5.1. в системе ФАПЧ,

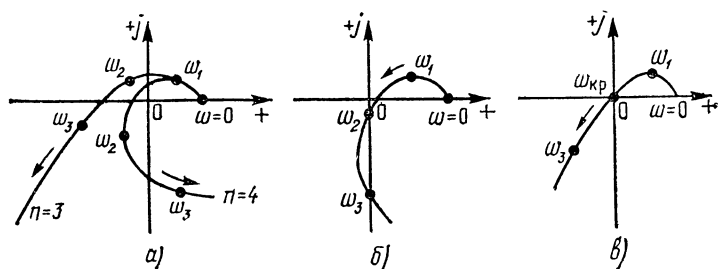


Рис. 5.3. Общий вид характеристического вектора:

а — устойчивой системы; б — неустойчивой системы; в — системы на границе устойчивости

Решение. Характеристический вектор определяется из выражения (5.10):

$$G(j\omega) = K - \omega^2 (T_1 + T_{\text{фд}}) + j\omega (1 + KT_2 - \omega^2 T_1 T_{\text{фд}}).$$

В соответствии с выражениями (5.13) условия, определяющие границу устойчивости, получаются следующими:

$$K_{\text{кр}} - \omega_{\text{кр}}^2 (T_1 + T_{\text{фд}}) = 0;$$

$$\omega_{\text{кр}} (1 + KT_2) - \omega_{\text{кр}}^3 T_1 T_{\text{фд}} = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_{\text{кр}}^2 = \frac{1 + KT_2}{T_1 T_{\text{фд}}} ; \quad K_{\text{кр}} = \frac{T_1 + T_{\text{фд}}}{T_{\text{фд}} (T_1 - T_2) - T_1 T_2}.$$

При значениях коэффициента усиления меньше критического система ФАПЧ устойчива, в противном случае она неустойчива. На рис. 5.4 показан годограф характеристического вектора устойчивости системы ФАПЧ при $T_1=0,1$ с, $T_2=0,04$ с, $T_{\text{фд}}=0,005$ с, $K=200$ с⁻¹.

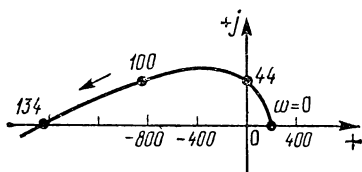


Рис. 5.4. Годограф характеристического вектора системы ФАПЧ

На практике более широкое по сравнению с критерием Михайлова применение нашел частотный критерий Найквиста, который позволяет судить об устойчивости системы по частотным характеристикам разомкнутой системы. Рассмотрим случай, когда разомкнутая сис-

тема РА устойчива и не содержит интегрирующих звеньев. Для доказательства критерия Найквиста введем вектор

$$F(j\omega) = 1 + W_p(j\omega) = \frac{D(j\omega) + N(j\omega)}{D(j\omega)}, \quad (5.14)$$

где $W_p(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ — частотная характеристика разомкнутой системы.

Числитель (5.14) является характеристическим вектором замкнутой системы, а знаменатель — характеристическим вектором разомкнутой системы. Определим изменение аргумента вектора (5.14) для случая, когда замкнутая система устойчива:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg [D(j\omega) + N(j\omega)] - \Delta \arg D(j\omega) = 0.$$

$0 \leq \omega \leq \infty \qquad \qquad \qquad 0 \leq \omega \leq \infty \qquad \qquad \qquad 0 \leq \omega \leq \infty$

Таким образом, если разомкнутая и замкнутая системы устойчивы, то изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ равно нулю, следовательно, его годограф не охватывает начала координат (рис. 5.5, а). В противном случае, ког-

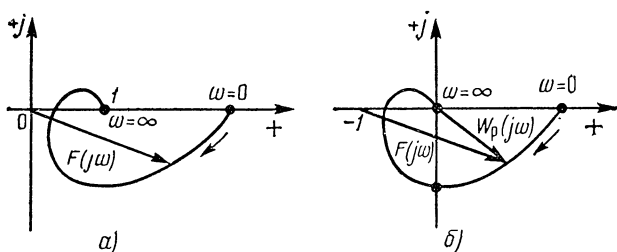


Рис. 5.5. К выводу критерия устойчивости Найквиста:
а — годограф $F(j\omega)$ устойчивой системы; б — годограф $W_p(j\omega)$ устойчивой системы

да годограф $F(j\omega)$ охватывает начало координат, изменение его аргумента не равно нулю и система в замкнутом состоянии неустойчива. Очевидно, что об изменении аргумента вектора $F(j\omega)$ удобнее судить по годографу частотной характеристики разомкнутой системы. Действительно, изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ будет равно нулю (рис. 5.5, б), если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. Отсюда следует формулировка критерия Найквиста.

Система РА, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. В том случае, когда годограф частотной характеристики охватывает эту точку, система неустойчива.

Если система РА содержит ν интегрирующих звеньев, то начальное значение фазочастотной характеристики равно $-\nu \frac{\pi}{2}$, а амплитудно-частотной — бесконечности,

система в разомкнутом состоянии нейтральна. В таких астатических системах для удобства оценки устойчивости годограф дополняют дугой бесконечного радиуса (рис. 5.6). Формулировка критерия устойчивости при этом не изменяется.

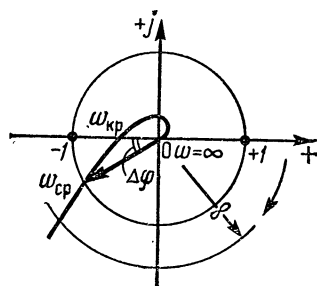


Рис. 5.6. Годограф $W_p(j\omega)$ астатической системы

Если годограф частотной характеристики разомкнутой системы проходит через точку $(-1, j0)$, то система в замкнутом состоянии находится на границе устойчивости.

Аналогичным образом доказывается критерий Найквиста и для случая, когда разомкнутая система неустойчива. При этом система в замкнутом состоянии будет устойчивой, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы m раз охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, где m — число полюсов разомкнутой системы, расположенных на комплексной плоскости справа от мнимой оси.

§ 5.4. ЗАПАСЫ УСТОЙЧИВОСТИ

В процессе эксплуатации системы РА ее параметры (коэффициенты усиления, постоянные времени) из-за изменения внешних условий, колебаний напряжений источников энергии и других причин отличаются от расчетных значений. Если не принять определенных мер, то система РА может стать неустойчивой. Для исключения этого явления при проектировании следует обеспечить определенные запасы устойчивости системы, которые характеризуют близость годографа частотной характеристики

разомкнутой системы к точке с координатами $(-1, j0)$. Запасы устойчивости определяются на двух частотах: *частоте среза* и *критической частоте*. На частоте среза АЧХ разомкнутой системы равна единице, на критической частоте ФЧХ принимает значение, равное $-\pi$.

Различают запас устойчивости по фазе и усилению. *Запас устойчивости по фазе* показывает, на какое значение ФЧХ разомкнутой системы на частоте среза отличается от $-\pi$ (рис. 5.6):

$$\Delta\varphi = \pi - \varphi_p(\omega_{cp}).$$

Запас устойчивости по усилению определяет, во сколько раз нужно увеличить коэффициент усиления, чтобы система оказалась на границе устойчивости. Так как фазочастотная характеристика разомкнутой системы не зависит от коэффициента усиления, то при его изменении меняется только масштаб годографа, поэтому запас устойчивости по усилению вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{1}{|W_p(j\omega_{кр})|}.$$

Системы РА, годографы частотных характеристик которых пересекают вещественную ось только справа от точки с координатами $(-1, j0)$ (рис. 5.6), называют *абсолютно устойчивыми*. В таких системах неустойчивость может наступить только при увеличении коэффициента усиления.

Если годограф частотной характеристики разомкнутой системы пересекает вещественную ось и слева от точки с координатами $(-1, j0)$, то систему называют *условно устойчивой* (рис. 5.7). Неустойчивой такая система может быть как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента усиления.

Для нормальной работы системы РА необходимо, чтобы запас устойчивости по усилению, как указывалось ранее, был не менее двух, а запас устойчивости по фазе — 0,5—1 рад.

Пример 5.3. Рассчитать запасы устойчивости в системе ФАПЧ, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии определяется выражением (5.10). Параметры системы: $T_1=0,1$ с; $T_2=0,04$ с; $T_{фд}=0,005$ с; $K=200$ с $^{-1}$.

Решение. АЧХ разомкнутой системы

$$|W_p(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_{фд}^2}},$$

а ФЧХ

$$\varphi_p(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_{\text{фд}}.$$

На рис. 5.8 построен годограф частотной характеристики разомкнутой системы ФАПЧ, из которого видно, что запас устойчивости по усилению равен бесконечности, а по фазе — 0,7 рад.

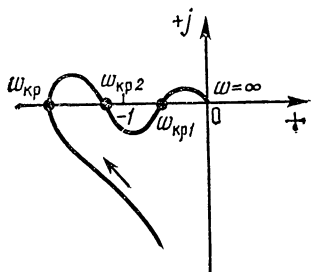


Рис. 5.7. Годограф $W_p(j\omega)$ условно устойчивой системы

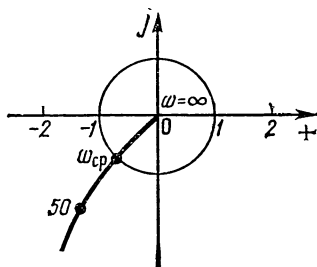


Рис. 5.8. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы ФАПЧ

§ 5.5. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЧХ

Построение годографов частотных характеристик разомкнутых систем РА связано с громоздкими вычислениями, поэтому целесообразно оценивать их устойчивость по ЛЧХ. Для этого необходимо построить логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы.

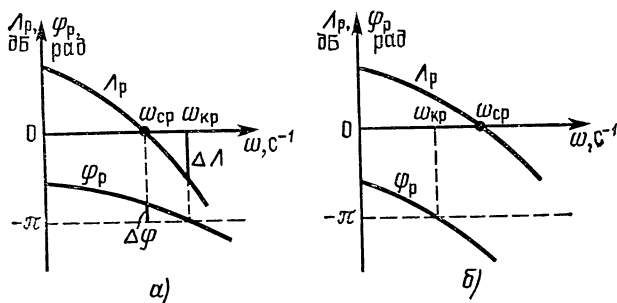


Рис. 5.9. ЛЧХ разомкнутой системы:
а — устойчивой; б — неустойчивой

В том случае, когда годограф $W_p(j\omega)$ не имеет точек пересечения с вещественной осью слева от точки с координатами $(-1, j0)$, то для устойчивости замкнутой системы РА необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\omega_{ср} < \omega_{кр}$ (рис. 5.9, а).

В условно устойчивых системах РА для оценки устойчивости следует в диапазоне частот, где логарифмическая АЧХ больше нуля, подсчитать число переходов логарифмической ФЧХ через прямую $-\pi$. Если число положительных переходов через эту прямую равно числу отрицательных, то система в замкнутом состоянии устойчива (рис. 5.10).

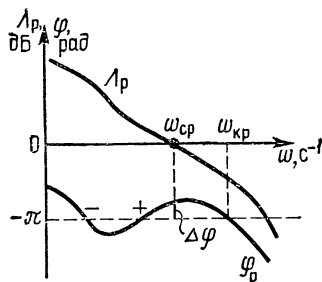


Рис. 5.10. К оценке устойчивости условно устойчивой системы

По ЛЧХ разомкнутой системы можно определить запасы устойчивости: запас по фазе отсчитывают по ФЧХ на частоте среза, а запас по усилению соответствует значению АЧХ на критической частоте, взятому с обратным знаком (см. рис. 5.9, а).

Если $\omega_{ср} = \omega_{кр}$, то система РА находится на границе устойчивости.

Критический коэффициент усиления вычисляют по формуле

$$20 \lg K_{кр} = 20 \lg k + \Delta \Lambda. \quad (5.15)$$

Пример 5.4. Определить запасы устойчивости системы автоматического сопровождения цели РЛС, структурная схема которой показана на рис. 5.11.

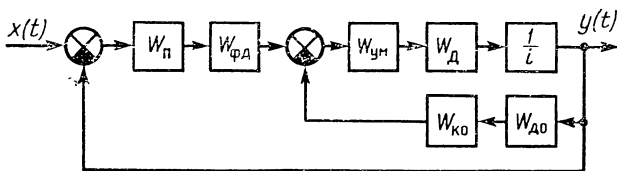


Рис. 5.11. Структурная схема системы автосопровождения цели РЛС

Решение. Передаточная функция цепи сигнала ошибки системы, согласно (4.1),

$$W_1(p) = W_{\Pi}(p) W_{\Phi\Delta}(p) = \frac{k_1}{(1 + pT_{\Pi})(1 + pT_{\Phi\Delta})},$$

где $W_{\Pi}(p) = k_{\Pi}/(1 + pT_{\Pi})$ — передаточная функция приемника системы; $W_{\Phi\Delta}(p) = k_{\Phi\Delta}/(1 + pT_{\Phi\Delta})$ — передаточная функция фазового детектора; $k_1 = k_{\Pi}k_{\Phi\Delta} = 0,175$ В/рад — коэффициент передачи цепи сигнала ошибки; $T_{\Pi} = T_{\Phi\Delta} = 0,01$ с — постоянные времени приемника и фазового детектора.

Передаточная функция внутреннего контура системы, образованного усилителем мощности, электрическим двигателем с редуктором и цепью обратной связи, в соответствии с выражением (4.5)

$$W_{\text{ВК}}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_0(p)},$$

где $W_2(p) = W_{\text{ум}}(p) W_{\Delta}(p)/i = k_2/p(1 + pT_{\text{м}})(1 + pT_{\text{ум}})$ — передаточная функция усилителя мощности с двигателем и редуктором; $k_2 = k_{\text{ум}}k_{\Delta}/i = 573$ рад/(с·В) — коэффициент передачи; i — передаточное число редуктора; $T_{\Delta} = 0,04$ с, $T_{\text{ум}} = 0,01$ с — постоянные времени двигателя и усилителя мощности; $W_0(p) = W_{\text{до}}(p) W_{\text{ко}}(p) = k_0 p^2/(1 + pT_0)(1 + pT_{\text{до}})$ — передаточная функция цепи обратной связи; $W_{\text{до}}(p) = k_{\text{до}}p$ — передаточная функция датчика частоты вращения антенны; $W_{\text{ко}}(p) = k_{\text{ко}}p/(1 + pT_0)$ — передаточная функция корректирующего устройства в цепи обратной связи системы; $k_0 = k_{\text{до}}k_{\text{ко}} = 0,0175 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ — коэффициент передачи цепи обратной связи;

$T_0 = 0,25$ с — постоянная времени корректирующего звена в цепи обратной связи; $T_{\text{до}} = 0,002$ с — постоянная времени датчика угловой частоты вращения антенны (влиянием этой постоянной времени на устойчивость системы пренебрежем).

Передаточная функция разомкнутой системы автоматического сопровождения

$$W_p(p) = W_1(p) \times \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_0(p)}.$$

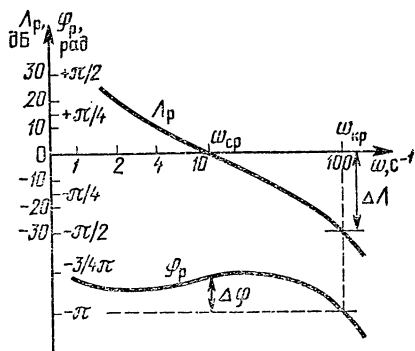


Рис. 5.12. Частотные характеристики системы автосопровождения

На рис.5.12 построены ЛЧХ разомкнутой системы, из которых видно, что частота среза меньше критической частоты, поэтому система автоматического сопровождения устойчива с запасами устойчивости по фазе 0,7 рад, а по усилению 25 дБ. Согласно формуле (5.15), критический коэффициент усиления системы равен 65 дБ.

В заключение дадим некоторые рекомендации, кото-

рые следуют из практики проектирования систем РА. Во-первых, для того чтобы в системе были обеспечены необходимые запасы устойчивости, наклон логарифмической АЧХ в диапазоне частот, в котором расположена частота среза, был равен -20 дБ/дек. При наклоне характеристики, равном -40 дБ/дек, трудно обеспечить необходимый запас устойчивости по фазе. При наклоне 0 дБ/дек получают излишне большие запасы устойчивости по фазе, система становится передемпфированной с длительным переходным процессом. Во-вторых, запас устойчивости по фазе в системе РА зависит от диапазона частот, в котором логарифмическая АЧХ разомкнутой системы на частоте среза имеет наклон -20 дБ/дек. Чем больше этот диапазон частот, тем выше запас устойчивости по фазе и наоборот.

§ 5.6. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим устойчивость систем РА, в состав которых входят устройства запаздывания (цифровые элементы, запоминающие устройства на магнитных лентах и др.). Передаточную функцию разомкнутой системы с запаздыванием запишем в виде

$$W_p(p) = W_{pн}(p) e^{-p\tau}, \quad (5.16)$$

где $W_{pн}(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы без запаздывания; τ — время запаздывания.

Передаточной функции (5.16) соответствуют следующие амплитудно- и фазочастотные характеристики разомкнутой системы:

$$|W_p(j\omega)| = |W_{pн}(j\omega)|; \quad \varphi_p(\omega) = \varphi_{pн}(\omega) - \omega\tau,$$

где $\varphi_{pн}(\omega)$ — фазочастотная характеристика разомкнутой системы без запаздывания.

Из этих характеристик следует, что запаздывание влияет только на фазочастотную характеристику, создавая на каждой частоте дополнительный фазовый сдвиг. Поэтому системы РА, устойчивые без запаздывания, могут быть неустойчивыми при включении в их состав устройств запаздывания. Для оценки устойчивости систем с запаздыванием могут быть использованы ЛЧХ. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 5.5. Передаточная функция системы РА в разомкнутом состоянии $W_p(p) = \frac{10}{p(1+p0,02)} e^{-p0,05}$.

Определить запасы устойчивости системы.

Решение. На рис. 5.13 построены ЛЧХ разомкнутой системы, из которых видно, что запас устойчивости по фазе равен 0,87 рад, а по усилению — 8 дБ. Отметим, что в системе без запаздывания

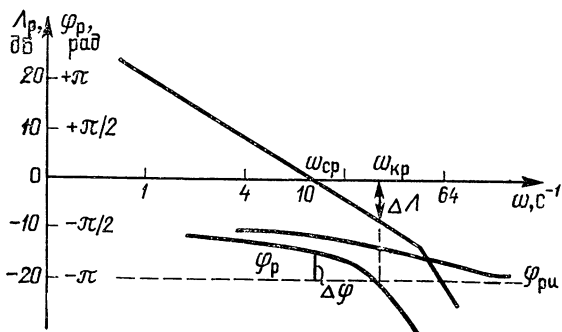


Рис. 5.13. ЛЧХ системы с запаздыванием

запас устойчивости по фазе равен 81° , а по усилению — бесконечно. Нетрудно установить, что при времени запаздывания $\tau > 0,14$ с рассматриваемая система неустойчива.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Дайте определение устойчивости системы РА с физической и математической точек зрения.
2. Какой характер имеет переходный процесс в устойчивой и неустойчивой системах?
3. Докажите необходимое условие устойчивости.
4. Докажите достаточное условие устойчивости.
5. Что такое критерии устойчивости? Каким образом они связаны с необходимыми и достаточными условиями устойчивости?
6. Что такое граница устойчивости? Каким образом при этом расположены корни характеристического уравнения системы РА на плоскости комплексного переменного?
7. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.
8. Каким образом по критерию Гурвица вычисляется критический коэффициент усиления и запас устойчивости по усилению?
9. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.
10. Что такое частота среза и критическая частота? Каким образом определяются эти частоты по годографу частотной характеристики разомкнутой системы?
11. Что такое запасы устойчи-

- ности? Каким образом они определяются по годографу частотной характеристики разомкнутой системы?
12. Почему для оценки близости системы РА к границе устойчивости необходимо использовать запасы как по усилению, так и по фазе?
13. Как определяются запасы устойчивости по ЛЧХ?
14. Как вычисляется критический коэффициент усиления по ЛЧХ?
-

ГЛАВА 6.

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При анализе качества работы систем РА исходят из того, что структурная схема и параметры устройств системы известны. Требуется оценить качество ее работы. Помимо устойчивости (см. гл. 5) системы РА оцениваются рядом качественных показателей, основными из которых являются точность работы, характер переходного процесса и частотные свойства. Показатели качества работы зависят не только от характеристик системы РА, но и от свойств, действующих на нее сигналов. Известно, что на систему РА помимо сигналов (управляющих воздействий) действуют возмущающие воздействия (помехи), снижающие точность ее работы. Например, в системах стабилизации промежуточной частоты, в системах автоматического сопровождения цели РЛС изменение температуры окружающей среды, отклонения напряжений источников энергии от номинальных значений, блуждание центра отражения радиолокационного сигнала по цели, шум электронных приборов приемника являются возмущающимися воздействиями.

Законы изменения управляющих воздействий и помех обычно заранее неизвестны, поэтому качество работы систем РА определяется косвенными признаками, которые называют *показателями качества работы системы*.

По реакции системы РА на скачкообразный сигнал судят о показателях качества переходного процесса и статической ошибке системы.

Динамическая ошибка работы РА оценивается при

управляющем воздействии вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i. \quad (6.1)$$

Частотные показатели качества работы системы РА определяются при гармоническом входном сигнале.

Качество работы систем РА относительно случайных сигналов и помех характеризуется по суммарной средней квадратической ошибке.

В системах автоматической стабилизации входной сигнал является постоянной величиной, поэтому основными показателями качества таких систем являются характеристики переходного процесса и суммарная средняя квадратическая ошибка. Качество работы следящих систем, входной сигнал которых является случайной функцией, оценивается не только по переходному процессу, но и по частотным характеристикам, динамической точности работы и суммарной средней квадратической ошибке.

Для оценки качества работы систем РА применяются и косвенные методы. Эти методы базируются на вычислении интегральных оценок. Широко используется *квадратичная интегральная оценка*:

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \alpha_1 \dot{e}^2(t) + \alpha_2 \ddot{e}^2(t) + \dots + \alpha_k [e^{(k)}(t)]^2] dt, \quad (6.2)$$

где $e(t)$ — ошибка системы, равная разности входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов; α_i — постоянные коэффициенты.

Качество работы системы РА определяется интегральной оценкой (6.2). Чем меньше ее значение, тем выше качество работы системы и наоборот. Меняя значения коэффициентов α_i , можно изменять влияние на интегральную оценку производных от ошибки системы. Применение интегральных оценок наталкивается на ряд трудностей, одна из которых связана с тем, что по значению интегральной оценки нельзя судить о показателях качества и точности работы системы РА, другая — с вычислением интеграла (6.2).

§ 6.2. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

На переходные процессы в системах РА накладываются определенные ограничения, связанные с особенно-

стями работы систем. Например, в системах автоматического сопровождения цели РЛС не допускаются большие углы отклонения антенны от установившегося значения, так как может произойти срыв сопровождаемой цели. Для повышения надежности работы механических узлов ограничивается число колебаний антенны в переходном процессе.

К основным показателям качества переходного процесса в системе РА относятся следующие параметры (рис. 6.1):

1) *длительность переходного процесса* t_n , равная интервалу времени с момента подачи сигнала до момента времени, когда выходной сигнал не будет отличаться от его установившегося значения не более чем на 5 %.

2) *перерегулирование* γ , равное отношению максимального значения выходного сигнала в переходном процессе к установившемуся значению: $\gamma = y_{\max}/y_u$;

3) *время установления первого максимума выходного сигнала* t_p , характеризующее скорость изменения выходного сигнала в переходном процессе;

4) *частота колебаний в переходном процессе* $\omega_t = 2\pi/T$, где T — период колебаний.

Для нахождения кривой переходного процесса используются аналитические методы или она определяется с помощью ЭВМ.

Установившееся значение выходного сигнала системы вычисляется по теореме о конечном значении (см. приложение П.1). При единичном входном сигнале

$$y_u = \lim_{p \rightarrow 0} pW_3(p) \frac{1}{p} = W_3(0),$$

где $W_3(p)$ — передаточная функция замкнутой системы.

В астатических системах РА установившееся значение выходного сигнала в переходном процессе равно единице, в статических системах — $K/(1+k)$.

Если сигнал на входе системы отличается от единицы, то в переходном процессе изменяется только масштаб выходного сигнала.

Пример 6.1. Найти переходный процесс в системе ФАПЧ,

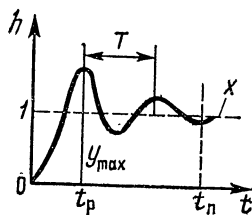


Рис. 6.1. К оценке показателей переходного процесса системы РА

передаточная функция которой в разомкнутом состоянии определяется выражением (5.10).

Решение. Для упрощения постоянной времени фазового детектора пренебрежем. Тогда передаточная функция замкнутой ФАПЧ

$$W_3(p) = \frac{200(1 + p0,04)}{p(1 + p0,1) + 200(1 + p0,04)}.$$

Преобразование Лапласа для отклонения частоты генератора при изменении эталонной частоты на $\Delta\omega \cdot 1(t)$

$$H(p) = \omega_3(p) \frac{\Delta\omega}{p} = \frac{200(1 + p0,04)}{0,1p^2 + 9p + 200} \frac{\Delta\omega}{p}.$$

Полюсы системы: $\lambda_1 = -40$, $\lambda_2 = -50$.

Применив теорему о вычетах (2.13), найдем

$$h(t) = \Delta\omega [1 + 3e^{-40t} - 4e^{-50t}].$$

На рис. 6.2 показан график переходного процесса, из которого видно, что длительность переходного процесса $t_n = 0,75$ с, а $\gamma = 1,08$.

§ 6.3. ЧАСТОТНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

Частотные показатели качества работы систем РА определяются по АЧХ замкнутой системы (рис. 6.3). Не-

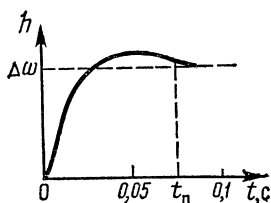


Рис. 6.2. К определению параметров переходного процесса в системе ФАПЧ

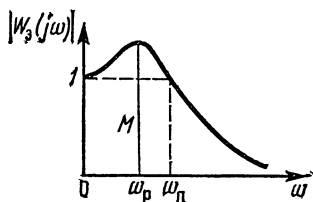


Рис. 6.3. АЧХ замкнутой системы

трудно установить, что значение этой характеристики при частоте, равной нулю, равно единице в астатических системах и $K/(1+k)$ в статических системах РА. Для удобства АЧХ статических систем нормируется, т. е. ее значения делятся на ее начальное значение; в этом случае АЧХ статических систем начинается с единицы.

К частотным показателям качества работы систем РА относятся следующие параметры:

1) *полоса пропускания* ω_n — диапазон частот, в котором АЧХ больше или равна единице. Если АЧХ замкнутой системы РА во всем диапазоне частот меньше едини-

цы, то полоса пропускания отсчитывается по уровню 0,7;

2) *резонансная частота* ω_p — частота, соответствующая максимуму АЧХ замкнутой системы, эта частота характеризует частоту колебаний в переходном процессе;

3) *показатель колебательности* M — максимальное значение АЧХ замкнутой системы. Обычно стремятся, чтобы показатель колебательности не превышал двух.

Рассмотрим некоторые приближенные соотношения, устанавливающие связь между параметрами частотных характеристик замкнутой и разомкнутой систем, которые позволяют оценить частотные показатели качества работы системы РА без построения АЧХ замкнутых систем.

Частотные характеристики замкнутой и разомкнутой систем связаны соотношением

$$W_3(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} = \left[1 + \frac{1}{|W_p(j\omega)|} e^{-j\varphi_p(\omega)} \right]^{-1},$$

где $|W_p(j\omega)|$, $\varphi_p(\omega)$ — АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы.

Из последнего выражения находим, что

$$|W_3(j\omega)| = \left[1 + \frac{1}{|W_p(j\omega)|^2} + \frac{2}{|W_p(j\omega)|} \cos \varphi_p(\omega) \right]^{-1/2}; \quad (6.3)$$

$$\varphi_3(\omega) = \arctg \frac{\sin \varphi_p(\omega)}{|W_p(j\omega)| + \cos \varphi_p(\omega)},$$

или при $\Delta\varphi(\omega) = \pi - \varphi_p(\omega)$

$$|W_3(j\omega)| = \left[1 + \frac{1}{|W_p(j\omega)|^2} - \frac{2}{|W_p(j\omega)|} \cos \Delta\varphi(\omega) \right]^{-1/2}; \quad (6.4)$$

$$\varphi_3(\omega) = -\arctg \frac{\sin \Delta\varphi(\omega)}{|W_p(j\omega)| - \cos \Delta\varphi(\omega)}.$$

Из уравнений (6.3) и (6.4) следует, что в диапазоне частот, в котором $|W_p(j\omega)| > 1$, АЧХ равна единице, а ФЧХ мало отличается от нуля. В диапазоне частот, в котором $|W_p(j\omega)| \leq 1$, характеристики $|W_3(j\omega)|$ и $\varphi_3(\omega)$ совпадают с характеристиками разомкнутой системы.

На частоте, равной полосе пропускания, АЧХ замкнутой системы равна единице. Тогда, согласно (6.4),

$$|W_p(j\omega_n)| = \frac{1}{2 \cos \Delta\varphi(\omega_n)}. \quad (6.5)$$

В диапазоне частот среза и пропускания логарифмическая АЧХ разомкнутой системы имеет наклон -20 дБ/дек. Поэтому ФЧХ в этом диапазоне частот изменяется незначительно и можно принять, что $\Delta\varphi(\omega_n) \approx \Delta\varphi(\omega_{ср}) = \Delta\varphi$. Тогда выражение (6.5) принимает вид

$$|W_p(j\omega_n)| = \frac{1}{2 \cos \Delta\varphi}.$$

Полоса пропускания и частота среза связаны соотношением

$$20 \lg \frac{\omega_n}{\omega_{ср}} = -20 \lg |W_p(j\omega_n)|.$$

Отсюда

$$\omega_n = 2\omega_{ср} \cos \Delta\varphi. \quad (6.6)$$

Значение показателя колебательности системы РА можно определить, если исследовать на максимум выражение (6.4). В диапазоне частот, в котором расположена резонансная частота, ФЧХ разомкнутой системы изменяется незначительно и приблизительно равна этой характеристике на частоте среза. Поэтому для отыскания максимума (6.4) можно продифференцировать это выражение по $|W_p(j\omega)|$ и приравнять его нулю. В результате получим, что максимум АЧХ замкнутой системы получается при $|W_p(j\omega)| = 1/\cos \Delta\varphi$. Подставив это выражение в (6.4), найдем, что колебательность системы связана с запасом устойчивости по фазе выражением

$$M = 1/\sin \Delta\varphi. \quad (6.7)$$

Пример 6.2. Оценить частотные показатели качества работы системы, частотная характеристика которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(j\omega) = \frac{40}{j\omega} \frac{1 + j\omega 0,25}{(1 + j\omega 0,5)(1 + j\omega 0,025)^2}.$$

Решение. На рис. 6.4 построены ЛЧХ разомкнутой и замкнутой систем. Из этих характеристик видно, что запас устойчивости по фазе равен $0,89$ рад; $\omega_n = 12,5$ с $^{-1}$; $M = 1,2$. Оценка показателей по формулам (6.6) и (6.7) позволяет получить следующие результаты: $\omega_n = 12,6$ с $^{-1}$, $M = 1,28$, т. е. оценка параметров АЧХ по этим формулам обеспечивает достаточную для практики точность.

§ 6.4. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РАБОТЫ СИСТЕМ

Помимо статистических ошибок, которые были рассмотрены в § 4.3, точность работы систем РА характеризуется динамическими и переходными ошибками (рис. 6.5).

Динамическая ошибка — ошибка в установившемся

режиме работы системы при действии на нее нестационарного сигнала.

Переходная ошибка — ошибка при работе системы в переходном процессе, который возникает при обработке начального рассогласования.

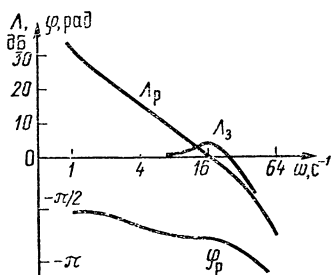


Рис. 6.4. К оценке частотных показателей качества работы систем РА

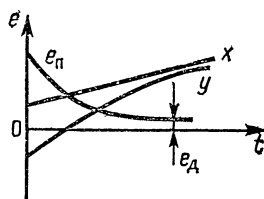


Рис. 6.5. К пояснению точности работы системы РА

Динамическая точность работы систем РА определяется при медленно изменяющихся входных сигналах (воздействия, число производных от которых ограничено). Сигнал (6.1) относится к медленно изменяющему воздействию, так как число производных от этого сигнала, не равных нулю, равно K , а $K+1$ -я производная равна нулю. Гармонический сигнал не является медленно изменяющимся, так как число производных от него равно бесконечности.

Переходные процессы в системах РА затухают значительно быстрее по сравнению с изменением медленно изменяющегося сигнала, поэтому и достигается установившийся динамический режим работы системы.

В соответствии с определением передаточной функции ошибки (4.12) преобразование Лапласа для ошибки системы

$$E(p) = W_e(p)X(p) = [C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k] X(p), \quad (6.8)$$

или в области действительного переменного

$$e(t) = C_0 x(t) + C_1 \dot{x}(t) + \frac{1}{2} C_2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{1}{k!} C_k x^{(k)}(t). \quad (6.9)$$

Число слагаемых в последнем выражении ограничено, так как сигнал $x(t)$ является медленно изменяющимся воздействием. Для нахождения неизвестных коэффициентов C_i , которые называют *коэффициентами ошибки*, известны три способа. Первым способом эти коэффициенты вычисляются по формуле

$$C_k = k! \frac{d^k}{dp^k} W_e(p) |_{p=0}.$$

Вторым способом коэффициенты ошибок находятся путём деления числителя передаточной функции ошибки на ее знаменатель.

Наиболее удобным является третий способ. Передаточную функцию ошибки представим в виде

$$W_e(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Перемножив полином знаменателя последнего выражения на (6.8), получим

$$[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0] [C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p + \dots + \frac{1}{k} C_k p^k] = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0. \quad (6.10)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа в выражении (6.10), определим формулы для последовательного вычисления коэффициентов ошибок. В результате найдем, что

$$C_0 = \frac{b_0}{a_0}; \quad C_1 = \frac{1}{a_0} [b_1 - a_1 C_0],$$

$$C_2 = \frac{2}{a_0} [b_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1].$$

Из выражения (6.9) следует, что коэффициенты ошибок имеют размерность c^i .

В инженерных расчетах коэффициенты ошибок удобнее рассчитывать через коэффициенты передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{K}{p^v} \frac{d_m p^m + \dots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{b_n p^n + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (6.11)$$

В табл. 6.1 приведены формулы для расчета первых трех коэффициентов ошибок статических и астатических систем РА через параметры передаточной функции (6.11).

Таблица 6.1

ν	C_i	Формулы для расчета
0	C_0	$\frac{1}{1+K}$
	C_1	$K \frac{b_1 - d_1}{(1+K)^2}$
	C_2	$2 \left[K \frac{b_2 - d_2}{(1+K)^2} + K \frac{b_1 (d_1 - b_1)}{(1+K)^3} + K^2 \frac{2d_1 (d_1 - b_1)}{(1+K)^3} \right]$
1	C_0	0
	C_1	$\frac{1}{K}$
	C_2	$2 \left[\frac{b_1 - d_1}{K} - \frac{1}{K^2} \right]$
2	C_0	0
	C_1	0
	C_2	$\frac{2}{K}$

Первое слагаемое в выражении (6.9) называют *ошибкой по положению*, а коэффициент C_0 — *коэффициентом ошибки по положению*, второе слагаемое — *ошибкой по скорости*, а коэффициент C_1 — *коэффициентом ошибки по скорости*. Аналогично, третье слагаемое в (6.9) называют *ошибкой по ускорению*, а коэффициент C_2 — *коэффициентом ошибки по ускорению*.

Учитывая особенности передаточных функций астатических систем РА, нетрудно установить, что в таких системах ν первых коэффициентов ошибок равны нулю, где ν — порядок астатизма системы РА.

При анализе качества работы систем РА помимо вычисления ошибок при медленно изменяющихся сигналах приходится оценивать точность и при гармонических воздействиях. В этом случае нельзя применять метод коэффициентов ошибок, так как число производных от гар-

монического сигнала не ограничено. Очевидно, что при этом для расчета ошибок необходимо использовать частотные характеристики. По АЧХ ошибки вычисляется амплитуда колебаний ошибки, а по ФЧХ — сдвиг колебаний ошибки относительно входного сигнала.

Пример 6.3. Найти динамическую ошибку при входном сигнале $x(t) = \alpha_1 t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2$ следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии $W_p(p) = \frac{K}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}$.

Решение. Коэффициенты ошибок вычисляются по формулам табл. 6.1 для $C_0 = 0$; $C_1 = \frac{1}{K}$; $C_2 = 2 \left[\frac{T_1 + T_3 - T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right]$.

Динамическая ошибка системы в соответствии с выражением (6.9)

$$e(t) = \frac{1}{K} (\alpha_1 + \alpha_2 t) + \frac{1}{K} \left[T_1 + T_3 - T_2 - \frac{1}{K} \right] \alpha_2.$$

Из этого выражения следует, что при увеличении коэффициента усиления системы и введении форсирующего звена ошибка уменьшается, увеличение же постоянных времени инерционных звеньев ухудшает динамическую ошибку системы.

§ 6.5. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА СИСТЕМЫ

Качество работы систем РА при случайных воздействиях оценивается по суммарной средней квадратической ошибке. В большинстве случаев закон распределения ошибки системы можно считать гауссовским, поэтому для расчета составляющих суммарной средней квадратической ошибки достаточно учесть математическое ожидание и корреляционную функцию ошибки или ее спектральную плотность.

Прежде чем рассматривать методы вычисления суммарной средней квадратической ошибки, установим, через какие передаточные функции в выражение для суммарной ошибки входят сигнал и помеха, полагая, что на вход системы подается воздействие вида

$$f(t) = x(t) + n(t),$$

где $x(t)$ — случайный сигнал; $n(t)$ — случайная помеха. Суммарная ошибка системы (рис. 6.6)

$$e_{\Sigma}(t) = x(t) - y(t),$$

где $y(t)$ — выходной сигнал системы.

Преобразование Лапласа для суммарной ошибки

$$E(p) = X(p) - W_3(p) F(p) = W_e(p) X(p) - W_3(p) n(p), \quad (6.12)$$

где $W_3(p)$ — передаточная функция замкнутой системы; $W_e(p)$ — передаточная функция ошибки анализируемой системы; $X(p)$, $n(p)$ — преобразования Лапласа для сигнала и помехи.

Из выражения (6.12) следует, что суммарная ошибка состоит из двух составляющих, одна из которых, определяющая точность воспроизведения сигнала, зависит от передаточной функции ошибки, вторая, обусловленная действием помехи, — от передаточной функции замкнутой системы.

При анализе средней квадратической ошибки ограничимся случаем, когда сигнал и помеха являются стационарными случайными функциями. При этом математическое ожидание помехи будем полагать нулю, а случайный сигнал представим в виде

$$x(t) = m_x + \dot{x}(t),$$

где m_x — математическое ожидание сигнала; $\dot{x}(t)$ — случайная составляющая сигнала.

Математическое ожидание суммарной ошибки рассчитывают по теореме о конечном значении функции (см. приложение П.1):

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) m_x(p). \quad (6.13)$$

Точность системы относительно случайных составляющих сигнала и помехи оценивается дисперсией ошибки

$$\sigma_e^2 = M[e^2(t)] = R_e(\tau)|_{\tau=0}, \quad (6.14)$$

где σ_e^2 — дисперсия ошибки; σ_e — средняя квадратическая ошибка системы; $e(t)$ — ошибка системы; M — математическое ожидание от квадрата ошибки; $R_e(\tau)$ — автокорреляционная функция ошибки.

На основании эргодической теоремы автокорреляционную функцию ошибки находят как среднее по времени

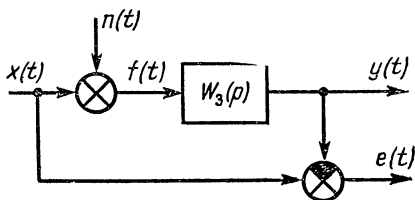


Рис. 6.6. К определению суммарной ошибки

от произведения случайных составляющих ошибки, разделенных промежутком времени τ :

$$R_e(\tau) = \overset{\circ}{e}(t) \overset{\circ}{e}(t + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \overset{\circ}{e}(t) \overset{\circ}{e}(t + \tau) dt, \quad (6.15)$$

где $\overset{\circ}{e}(t) = \overset{\circ}{x}(t) - \overset{\circ}{y}(t)$ — случайная составляющая суммарной ошибки.

По теореме свертки (см. приложение П.1), согласно (6.12),

$$\overset{\circ}{e}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [w_e(\lambda) \overset{\circ}{x}(t - \lambda) - w_3(\lambda) n(t - \lambda)] d\lambda; \quad (6.16)$$

$$\overset{\circ}{e}(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [w_e(\eta) \overset{\circ}{x}(t + \tau - \eta) - w_3(\eta) n(t + \tau - \eta)] d\eta,$$

где $w_e(t)$ — импульсная переходная функция ошибки системы; $w_3(t)$ — импульсная переходная функция замкнутой системы.

Так как рассматривают стационарный режим работы системы, то интегрирование в выражениях (6.16) берут от минус бесконечности.

Подставив выражения (6.16) в (6.15), после несложных преобразований найдем автокорреляционную функцию ошибки:

$$\begin{aligned} R_e(\tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [w_e(\lambda) w_e(\eta) R_x(\tau + \lambda + \eta) + \\ & + w_3(\lambda) w_3(\eta) R_n(\tau + \lambda - \eta) + w_e(\lambda) w_3(\eta) R_{xn} \times \\ & \times (\tau + \lambda - \eta) + w_3(\lambda) w_e(\eta) R_{nx}(\tau + \lambda - \eta)] d\lambda d\eta, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где $R_x(\tau)$ — автокорреляционная функция сигнала; $R_n(\tau)$ — автокорреляционная функция помехи; $R_{xn}(\tau)$, $R_{nx}(\tau)$ — взаимные корреляционные функции.

Подставив в последнее выражение вместо τ нуль, получим дисперсию ошибки системы:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [w_e(\lambda) w_e(\eta) R_x(\lambda - \eta) + w_3(\lambda) w_3(\eta) R_n \times \\ & \times (\lambda - \eta) + w_e(\lambda) w_3(\eta) R_{xn}(\lambda - \eta) + \\ & + w_3(\lambda) w_e(\eta) R_{nx}(\lambda - \eta)] d\lambda d\eta = \sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2 + \sigma_{exn}^2 + \sigma_{enx}^2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Дисперсия ошибки может быть вычислена и через ее спектральную плотность, которая, как известно, равна преобразованию Фурье от автокорреляционной функции ошибки системы (6.17):

$$S_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_e(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Подставив в это выражение формулу (6.17), определим спектральную плотность ошибки системы:

$$S_e(\omega) = |W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_s(j\omega)|^2 S_n(\omega) + W_e(-j\omega) W_s(j\omega) S_{xn}(\omega) + W_e(j\omega) W_s(-j\omega) S_{nx}(\omega), \quad (6.19)$$

где $S_x(\omega)$ — спектральная плотность сигнала; $S_n(\omega)$ — спектральная плотность помехи; $S_{xn}(\omega)$, $S_{nx}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности.

Так как

$$R_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega,$$

то в соответствии с выражением (6.14) дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_s(j\omega)|^2 S_n(\omega) + \\ &+ W_e(-j\omega) W_s(j\omega) S_{xn}(\omega) + W_e(j\omega) W_s(-j\omega) S_{nx}(\omega)] d\omega = \\ &= \sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2 + \sigma_{exn}^2 + \sigma_{enx}^2. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Если сигнал и помеха некоррелированы, то $R_{xn}(\tau) = R_{nx}(\tau) = 0$; $S_{xn}(\omega) = S_{nx}(\omega) = 0$ и выражения (6.16) — (6.20) упрощаются.

Первое слагаемое в (6.20) зависит как от АЧХ ошибки системы, так и от статистических характеристик сигнала, оно определяет среднюю квадратическую ошибку воспроизведения сигнала $x(t)$. Второе слагаемое в (6.20) зависит от АЧХ замкнутой системы и характеристик помехи, оно характеризует ошибку системы вследствие действия помехи $n(t)$. Последние два слагаемых в (6.20) — составляющие ошибки из-за корреляции сигнала с помехой и помехи с сигналом.

Величину

$$\sigma_{\Sigma} = [m_e^2 + \sigma_e^2]^{1/2} \quad (6.21)$$

называют *суммарной средней квадратической ошибкой системы РА*.

Вычисление средней квадратической ошибки через ее автокорреляционную функцию (6.17) связано с некоторыми трудностями, одна из которых связана с нахождением импульсной переходной функции анализируемой системы РА, другая — с вычислением (6.18). Поэтому на практике среднюю квадратическую ошибку рассчитывают через спектральную плотность ошибки по формуле (6.20), вычисление интеграла в которой производится по формулам, приведенным в приложении П.2.

В инженерной практике среднеквадратическая ошибка также находится с помощью графоаналитического метода. Для этого строят графики, соответствующие отдельным слагаемым выражения (6.19). Дисперсия ошибки для некоррелированных сигнала и помехи $\sigma^2 = (Q_x + Q_n)/\pi$, где Q_x и Q_n — площади под графиками спектральных плотностей (рис. 6.7, а, б).

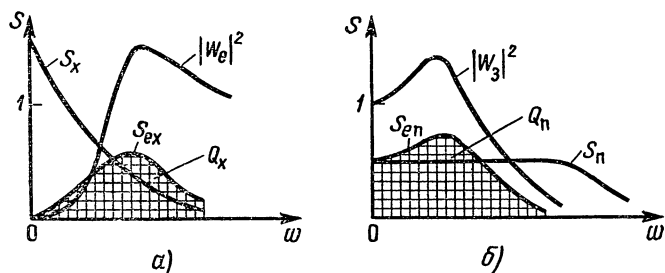


Рис. 6.7. К определению средней квадратической ошибки системы РА

На практике часто встречаются случаи, когда помеху можно считать белым шумом, спектральная плотность которого в пределах полосы пропускания системы РА постоянна.

При этом дисперсия ошибки системы из-за действия помехи

$$\sigma_{еп}^2 = \frac{S_n(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 d\omega.$$

Величину

$$f_{эф} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 d\omega; \quad \omega_{эф} = \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 d\omega$$

(6.22)

называют *эффективной полосой пропускания системы* РА. Из рис. 6.8 видно, что $\omega_{\text{эф}}$ — это основание прямоугольника, площадь которого равна площади, ограниченной графиком квадрата АЧХ. Дисперсия ошибки системы РА из-за действия помехи

$$\sigma_{\text{еп}}^2 = S_{\pi}(\omega) \omega_{\text{эф}} / \pi. \quad (6.23)$$

В табл. 6.2 даны выражения для вычисления эффективной полосы пропускания систем РА, наиболее часто встречающихся в радиотехнических устройствах.

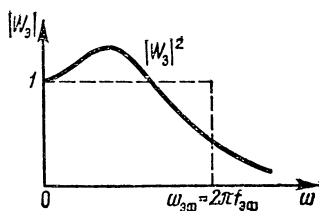


Рис. 6.8. К определению эффективной полосы пропускания системы РА

Таблица 6.2

$W_p(p)$	$f_{\text{эф}}$
$\frac{K}{p}$	$\frac{K}{2}$
$\frac{K}{1 + pT}$	$\frac{K^2}{2T(1 + K)}$
$\frac{K}{p(1 + pT_1)(1 + pT_3)}$	$\frac{K}{2(T_1 + T_3 - KT_1T_3)}$
$\frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}$	$\frac{K(T_1 + T_2^2K)}{2T_1(1 + KT_2)}$
$\frac{K(1 + pT_2)}{p^2}$	$\frac{1 + KT_2^2}{2T_2}$

§ 6.6. СИСТЕМА С БЕЛЫМ ШУМОМ НА ВХОДЕ

Помехи обычно являются белыми шумами, а сигналы, как правило, не относятся к белым шумам. Однако если использовать формирующий фильтр, то анализ систем РА относительно сигналов сводится к случаю действия на систему белых шумов.

Формирующий фильтр — устройство, позволяющее генерировать случайный сигнал с заданной спектральной плотностью из сигнала белого шума. Характеристики формирующего фильтра для стационарных случайных сигналов определяются, следующим образом. Так как спектральная плотность сигнала является четной дробно-рациональной функцией частоты, то она может быть представлена в виде двух комплексно-сопряженных сомножителей: $S_x(\omega) = N_x \psi(j\omega) \psi(-j\omega)$, откуда и находится передаточная функция формирующего фильтра

$$W_\Phi(p) = \psi(j\omega)|_{j\omega=p}.$$

Для расчета коэффициентов передаточной функции формирующего фильтра выражение для спектральной плотности сигнала нужно записать в виде

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{c_{2m}(j\omega)^{2m} + \dots + c_2(j\omega)^2 + c_0}{d_{2n}(j\omega)^{2n} + \dots + d_2(j\omega)^2 + d_0} = \\ &= \left| \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{d_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} \right| N_x, \end{aligned} \quad (6.24)$$

Вычислив квадрат модуля в левой части (6.24) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях частоты слева и справа, получим уравнения для определения коэффициентов передаточной функции формирующего фильтра a_i и b_i .

Формирующий фильтр и анализируемая система РА образуют некоторую расширенную систему, на вход которой действует белый шум. На рис. 6.9 показана схема

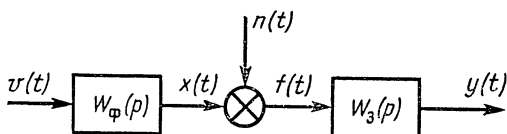


Рис. 6.9. Схема включения формирующего фильтра

такой системы для случая, когда помеха является белым шумом. Если помеха не белый шум, то в схему расширенной системы нужно включить формирующий фильтр, который из белого шума будет генерировать случайную помеху с заданной спектральной плотностью.

Пример 6.4. Найти передаточную функцию формирующего фильтра для сигнала, возникающего из-за колебаний летательного ап-

парата, спектральная плотность которого

$$S_K(\omega) = N_K \frac{1 + T_{K0} \omega^2}{\omega^2 [T_K^4 \omega^4 + 4\xi_K^2 T_K^2 \omega^2 + 1]}.$$

Решение. В соответствии с выражением (6.24)

$$N_K \frac{1 + T_{K0}^2 \omega^2}{\omega^2 [T_K^4 \omega^4 + 4\xi_K^2 T_K^2 \omega^2 + 1]} = N_K \left| \frac{b_0 + b_1 j\omega}{\omega [a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0]} \right|^2.$$

Из последнего выражения найдем, что

$$b_0 = 1; \quad b_1 = T_{K0}; \\ a_1 = 1, \quad a_1^2 = 2T_K^2 (1 + 2\xi_K^2), \quad a_2 = T_K^2.$$

Таким образом, передаточная функция формирующего фильтра имеет вид

$$W_{\text{фн}}(p) = \frac{1 + T_{K0} p}{p [T_K^2 p^2 + 2\xi_K T_K p + 1]}, \quad (6.25)$$

где $2\xi_K = [2(2\xi_K^2 + 1)]^{1/2}$.

На вход формирующего фильтра с передаточной функцией (6.25) нужно подать белый шум с уровнем спектральной плотности N_K .

Пример 6.5. Определить среднюю квадратическую ошибку системы автоматического сопровождения цели РЛС, передаточная функция которой в замкнутом состоянии имеет вид

$$W_z(p) = \frac{1 + pT_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_3)},$$

где $T_1 = 0,37$ с; $T_2 = 0,5$ с, $T_3 = 0,14$ с.

На систему поступают:

1) сигнал, обусловленный перемещением сопровождаемой цели относительно РЛС, установленной на летательном аппарате. Математическое ожидание и спектральная плотность случайной составляющей этого сигнала определяются выражениями

$$m_x = \alpha t, \quad S_x(\omega) = \frac{N_x}{\omega^2 (1 + T_x^2 \omega^2)},$$

где $\alpha = 0,175$ рад·с⁻¹; $N_x = 3,05 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $T_x = 20$ с;

2) случайное воздействие, возникающее из-за колебаний летательного аппарата относительно центра масс. Спектральная плотность этого воздействия

$$S_K(\omega) = N_K \frac{1 + T_{K0}^2 \omega^2}{\omega^2 [T_K^4 \omega^4 + 4\xi_K^2 T_K^2 \omega^2 + 1]},$$

где $N_K = 0,15 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $T_K = 0,4$ с; $T_{K0} = 2,5$ с; $4\xi_K^2 = 1$;

3) угловой шум, возникающий из-за того, что центр отражения радиолокационного сигнала «блуждает» по сопровождаемой цели. Этот шум можно считать белым с уровнем спектральной плотности [16] $S_{\text{уш}} = (0,25 L/R)^2$, где L — геометрический размер цели; R — дальность до сопровождаемой цели;

4) помехи, обусловленные тепловым шумом приемника РЛС и флуктуациями отраженного от цели сигнала. Эти воздействия при анализе точности системы можно считать белыми шумами и объединить в одно воздействие с уровнем спектральной плотности $S_{\Phi}(\omega) = N_{\Phi}$, где $N_{\Phi} = 0,31 \cdot 10^{-6}$ рад \cdot с.

Решение. Математическое ожидание (динамическая ошибка системы) в соответствии с (6.13)

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) \frac{\alpha}{p^2} = (T_1 + T_3 - T_2) \alpha = 0,17 \cdot 10^{-2} \text{ рад},$$

где $W_e(p) = 1 - W_3(p)$ — передаточная функция ошибки системы автоматического сопровождения цели РЛС.

Дисперсия ошибки системы относительно случайной составляющей сигнала вычисляется по формуле (6.20), в которой спектральная плотность под знаком интеграла

$$S_{ex}(\omega) = N_x |W_e(j\omega) W_{\Phi x}(j\omega)|^2,$$

где $W_{\Phi x}(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_x)}$ — частотная характеристика формирующего фильтра сигнала.

Таким образом, дисперсия ошибки относительно сигнала

$$\begin{aligned} \sigma_{ex}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_x \left| \frac{c_1 j\omega + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1(j\omega) + d_0} \right| d\omega = \\ &= N_x \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0(d_1 d_2 - d_0 d_3)}, \end{aligned}$$

где $c_1 = T_1 T_3$; $c_0 = T_1 + T_3 - T_2$; $d_3 = T_1 T_3 T_x$; $d_2 = T_1 T_3 + T_1 T_x + T_3 T_x$; $d_1 = T_1 + T_3 + T_x$; $d_0 = 1$.

Последний интеграл найден по формуле, приведенной в приложении П.2 для $n=3$. Подставив значения параметров системы и сигнала в последнее выражение, найдем, что $\sigma_{ex}^2 = 0,21 \cdot 10^{-6}$ рад \cdot с. Случайный сигнал, возникающий из-за колебаний летательного аппарата, является управляющим воздействием, поэтому в формуле для дисперсии ошибки он определяется через передаточную функцию ошибки. Дисперсия ошибки системы относительно сигнала колебаний летательного аппарата, согласно (6.20),

$$\begin{aligned} \sigma_{ек}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_{\kappa} |W_e(j\omega) W_{\Phi \kappa}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_{\kappa} \times \\ &\times \left| \frac{c_{2\kappa}(j\omega)^2 + c_{1\kappa} j\omega + c_{0\kappa}}{d_{4\kappa}(j\omega)^4 + d_{3\kappa}(j\omega)^3 + d_{2\kappa}(j\omega)^2 + d_{1\kappa} j\omega + d_{0\kappa}} \right| d\omega, \end{aligned}$$

где $W_{\Phi \kappa}(j\omega)$ — частотная характеристика формирующего фильтра для колебаний летательного аппарата, определяемая выражением (6.25);

$$\begin{aligned} c_{2\kappa} &= T_1 T_3 T_{\kappa 0}; \quad c_{1\kappa} = T_{\kappa 0} (T_1 + T_3 - T_2); \quad c_{0\kappa} = T_1 + T_3 - T_2; \\ d_{4\kappa} &= T_{\kappa}^2 T_1 T_3; \quad d_{3\kappa} = T_{\kappa}^2 (T_1 + T_3) + 2T_{\kappa} T_{\kappa} T_1 T_3; \quad d_{2\kappa} = T_{\kappa}^2 + \\ &+ T_1 T_3 + 2T_{\kappa} T_{\kappa} (T_1 + T_3), \quad d_{1\kappa} = 2T_{\kappa} T_{\kappa} + T_1 + T_3; \quad d_{0\kappa} = 1. \end{aligned}$$

Этот интеграл вычисляется по формуле, данной в приложении П.2 для случая $n=4$:

$$\sigma_{ек}^2 = \frac{c_{2к}^2 d_{0к} d_{1к} d_{4к} + (c_{1к}^2 - 2c_{0к} c_{2к}) d_{0к} d_{3к} d_{4к} +}{2d_{0к} d_{4к} (-d_{0к} d_{3к}^2 - d_{1к}^2 d_{4к} +} \rightarrow$$

$$\frac{+ c_{0к}^2 (-d_{1к} d_{4к}^2 + d_{2к} d_{3к} d_{4к})}{+ d_{1к} d_{2к} d_{3к}}.$$

После подстановки в это выражение заданных значений параметров системы и сигнала получим $\sigma_{ек}^2 = 2,31 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2$.

Угловой шум и флуктуации отраженного от цели сигнала являются помехами для системы автоматического сопровождения цели, снижающими точность сопровождения цели.

Составляющие дисперсии ошибки системы, возникающие из-за углового шума и флуктуаций отраженного от цели сигнала, определяются выражениями

$$\sigma_{еуш}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\varphi}(j\omega)|^2 S_{уш}(\omega) d\omega = S_{уш} \times$$

$$\times \left[\frac{T_2^2}{2T_1 T_3 (T_1 + T_3)} + \frac{1}{2(T_1 + T_3)} \right];$$

$$\sigma_{еф}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\varphi}(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) d\omega = N_{\varphi} \left[\frac{T_2^2}{2T_1 T_3 (T_1 + T_3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(T_1 + T_3)} \right];$$

При дальности до сопровождаемой цели $R=5000$ м и $L=5$ м эти ошибки имеют следующие значения: $\sigma_{еуш}^2 = 0,036 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2$; $\sigma_{еф}^2 = 1,73 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2$.

Таким образом, суммарная средняя квадратическая ошибка системы автоматического сопровождения цели РЛС в соответствии с (6.21)

$$\sigma_{\Sigma} = [m_e^2 + \sigma_{ек}^2 + \sigma_{еуш}^2 + \sigma_{еф}^2]^{1/2} = 0,28 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. Какие характеристики составляют понятие качества работы системы РА?
2. Определите показатели качества переходного процесса и частотные показатели, поясните их физический смысл.
3. Поясните связь частотных показателей качества работы с частотными характеристиками разомкнутой системы РА.
4. Что такое статическая и динамическая ошибки системы РА?

5. Какие воздействия относятся к медленно изменяющимся сигналам?
 6. Каким образом экспериментальным путем можно определить ошибку системы РА по положению и по скорости?
 7. При каком сигнале статическая ошибка совпадает с ошибкой по положению?
 8. Чему равны первые два коэффициента ошибок в системах РА с астатизмом первого и второго порядков?
 9. Каким образом вычисляется ошибка при гармоническом сигнале?
 10. Что такое суммарная ошибка системы РА?
 11. Дайте определение средней квадратической ошибки системы РА и укажите способы ее вычислений.
 12. Поясните понятие эффективной полосы пропускания системы РА относительно белого шума.
-

ГЛАВА 7

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачи проектирования (синтеза) системы РА состоит в выборе структурной схемы параметров и способа технической реализации системы из условия обеспечения ряда требований, которые следуют из назначения проектируемой системы и обеспечения ее характеристик.

Один из возможных способов описания требований к проектируемой системе — задание показателей качества работы системы, рассмотренных в гл. 6 (например, допустимых значений статической, динамической и средней квадратической ошибок системы). Это может быть сделано, если известны характеристики управляющих и возмущающих воздействий. Детерминированные воздействия должны быть заданы как функции времени или их производные. Для случайных сигналов и помех должны быть известны их корреляционные функции или спектральные плотности. При такой постановке синтез системы РА сводится к выбору структурной схемы, с помощью которой можно обеспечить заданные показатели качества работы системы РА не хуже заданных.

Если характеристики управляющих и возмущающих воздействий известны, то систему РА можно спроектировать как оптимальную, обеспечив минимальное значение суммарной среднеквадратической ошибки. Решить эту задачу позволяет теория оптимальных фильтров Н. Ви-

нера и Р. Калмана, которая применительно к проектированию оптимальных системы РА, рассмотрена в гл. 9.

Возможна и иная постановка задачи синтеза оптимальных систем. Наиболее общей является ее постановка с учетом достижения минимума *функционала* (*критерия качества*)

$$J = \int_0^T [v_e(t) + v_u(t)] dt, \quad (7.1)$$

где $v_e(t) = e^2(t) + \alpha_1 \dot{e}^2(t) + \dots + \alpha_k (e^{(k)}(t))^2$ — квадратичная форма относительно ошибки системы $e(t)$; $v_u(t) = u^2(t) + q_1 \dot{u}^2(t) + \dots + q_k (u^{(k)}(t))^2$ — квадратичная форма относительно сигнала управления $u(t)$; T — время работы системы.

Первая квадратичная форма в функционале (7.1) выбирается из требований, предъявляемых к точности проектируемой системы, вторая учитывает ограничения на сигнал управления. При этом задача оптимального синтеза формулируется следующим образом. Из допустимого множества $u(t)$ необходимо выбрать и технически реализовать такой сигнал управления, который переводит объект управления из начального состояния в конечное и минимизирует функционал (7.1). Для решения таких задач используются методы вариационного исчисления, принцип максимума Л. С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Белмана. Здесь возможны два случая: 1) полностью известна информация о состоянии объекта управления; 2) информация об объекте управления неполная или вообще неизвестна. Во втором случае при синтезе системы возникает дополнительная задача оценки состояния объекта управления, на основании которой формируется оптимальный сигнал управления.

Синтез оптимальных систем из условия минимума функционала (7.1) связан с рядом трудностей. Одна из трудностей состоит в том, что в настоящее время нет каких-либо методов, позволяющих связать коэффициенты квадратичных форм функционала (7.1) α_i и q_i с заданными показателями качества работы проектируемой системы. Поэтому в процессе синтеза системы приходится рассчитывать большое число вариантов оптимальных систем с различными видами квадратичных форм и их коэффициентов, объем расчетов при этом может быть весьма значительным. Другая трудность связана с реа-

лизацией найденных оптимальных алгоритмов управления, которые получаются особо сложными и могут быть реализованы лишь приближенно. Вследствие отмеченных трудностей методы проектирования оптимальных систем из условия минимума функционала (7.1) в основном используются в научных исследованиях для оценки предельных соотношений и мало пригодны в инженерных задачах проектирования систем РА.

В данной главе рассматривается синтез систем РА из условия обеспечения допустимых ошибок в системе и удовлетворения других показателей качества работы. Такой метод называют *динамическим синтезом систем РА*.

Помимо требований к качеству функционирования в процессе синтеза систем РА предъявляются требования и к их сложности. Всегда желательно, чтобы спроектированная система была простой, а требования к элементам системы — минимальными. В качестве *функционала сложности системы* можно применять следующий интеграл [14]:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2\nu} |W_p(j\omega)|^2 d\omega, \quad (7.2)$$

где $W_p(j\omega)$ — частотная характеристика разомкнутой системы; ν — порядок астатизма.

Чем меньше значение интеграла (7.2), тем ниже требования к устройствам системы.

Помимо требований к качеству работы проектируемой системы РА, к ее сложности предъявляется и ряд требований, связанных с надежностью работы системы, стабильностью ее характеристик при изменении условий окружающей среды, эксплуатацией, массой, габаритами и т. п. В настоящее время теория оптимальных систем не позволяет объединить всю совокупность требований к проектируемой системе в виде единого критерия, поэтому удовлетворение их во многом зависит от опыта и квалификации инженера-исследователя.

§ 7.2. ЖЕЛАЕМАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

При синтезе систем РА будем полагать, что по известным характеристикам управляющих и возмущающих воздействий определены допустимые значения ошибок

по положению, скорости, ускорению, ширине полосы пропускания, найденной из условия обеспечения требуемого значения средней квадратической ошибки, а также допустимая колебательность системы. Требования к указанным ошибкам формулируются в виде следующих неравенств:

$$e_{x0} \leq e_{x0д}; \quad e_{\dot{x}} \leq e_{\dot{x}д}; \quad e_{\ddot{x}} \leq e_{\ddot{x}д}, \quad (7.3)$$

где e_{x0} , $e_{\dot{x}}$, $e_{\ddot{x}}$ — ошибки проектируемой системы по положению, скорости и ускорению.

На первом этапе синтеза состоит в нахождении *желаемой передаточной функции разомкнутой системы*, которая позволяет удовлетворить заданные требования к проектируемой системе РА. Очевидно, что желаемую передаточную функцию разомкнутой системы следует формировать в более простом виде. Желаемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{рж1}(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}; \quad (7.4)$$

$$W_{рж11}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{(1 + pT_1)^2(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}. \quad (7.5)$$

При синтезе систем с астатизмом первого порядка

$$W_{рж1}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}; \quad (7.6)$$

$$W_{рж11}(p) = \frac{K(1 + pT_2)^2}{p(1 + pT_1)^2(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}. \quad (7.7)$$

При проектировании систем с астатизмом второго порядка желаемая передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{рж}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p^2(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}, \quad (7.8)$$

где Π — знак произведения.

Задача синтеза систем РА сводится к определению по заданным показателям качества параметров желаемой

мой передаточной функции K , T_1 , T_2 и T_3 . Звенья с постоянными времени T_i в такой функции учитывают влияние на проектируемую систему РА устройств с малыми постоянными времени (например, приемника РЛС в системе автоматического сопровождения цели и т. п.).

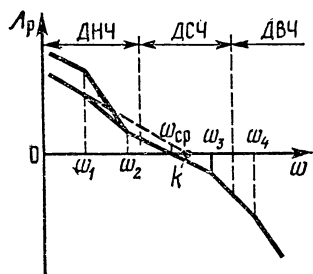


Рис. 7.1. ЛЧХ разомкнутых систем РА

Прежде чем рассматривать методику нахождения параметров желаемой передаточной функции, проанализируем типичные логарифмические АЧХ, соответствующие передаточным функциям (7.6) и (7.7) (рис. 7.1). На этих характеристиках различают три диапазона частот. Вид характеристики в диапазоне низких частот (ДНЧ) характеризует точность работы системы относительно управляющего воздействия. В диапазоне средних частот

(ДСЧ) находится частота среза. В этом диапазоне частот вид характеристики определяет запас устойчивости по фазе, полосу пропускания, показатели качества переходного процесса. Вид характеристики в диапазоне высоких частот (ДВЧ) влияет на запасы устойчивости в системе РА.

Найдем параметры желаемой передаточной функции системы с астатизмом первого порядка (7.6). По заданному значению колебательности системы и формуле (6.7) вычисляют запас устойчивости по фазе:

$$\Delta\varphi = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (7.9)$$

Требуемое значение полосы пропускания и выражение (6.6) позволяют рассчитать частоту среза проектируемой системы:

$$\omega_{ср} = \omega_n / (2 \cos \Delta\varphi). \quad (7.10)$$

По допустимым значениям ошибок по скорости и ускорению находят коэффициенты ошибок:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = e_{\dot{x}} / \dot{x}_m, \quad C_2 = 2e_{\ddot{x}} / \ddot{x}_m, \quad (7.11)$$

где \dot{x}_m , \ddot{x}_m — максимальные значения первой и второй производных от управляющего воздействия.

Коэффициент ошибки по скорости определяет коэффициент усиления в системе РА:

$$K = 1/C_1. \quad (7.12)$$

Для нахождения постоянных времени T_1 и T_2 установим связь сопряженных частот $\omega_1 = 1/T_1$ и $\omega_2 = 1/T_2$ с коэффициентом усиления и частотой среза. Из рис. 7.1 следует, что

$$\Lambda(\omega_1) = 20 \lg \frac{K}{\omega_1}; \quad \Lambda(\omega_2) = 20 \lg \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_2}. \quad (7.13)$$

Наклон характеристики между частотами ω_1 и ω_2 равен -40 дБ/дек, поэтому

$$\Lambda(\omega_1) - \Lambda(\omega_2) = 40 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (7.14)$$

Согласно (7.13) и (7.14),

$$K/\omega_{\text{ср}} = \omega_2/\omega_1 = T_1/T_2. \quad (7.15)$$

Постоянные времени T_1 и T_2 можно получить и из выражения для коэффициента ошибки по ускорению:

$$C_2 = 2 \left[\frac{T_1 + T_3 + \sum_{i=4}^n T_i - T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right] \approx 2 \frac{T_1 - T_2}{K}. \quad (7.16)$$

Упрощения в (7.16) не приводят к невыполнению требований по точности работы проектируемой системы РА. Из выражений (7.15) и (7.16) находим, что

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{KC_2 \omega_{\text{ср}}}{K - \omega_{\text{ср}}}; \quad T_1 = \frac{KT_3}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (7.17)$$

Постоянную времени T_3 функции (7.6) определим из условия обеспечения в проектируемой системе запаса устойчивости (7.9):

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega_{\text{ср}} T_1 + \arctg \omega_{\text{ср}} T_2 - \arctg \omega_{\text{ср}} T_3 - \sum_{i=4}^n \arctg \omega_{\text{ср}} T_i. \quad (7.18)$$

При высоких требованиях к точности работы системы не всегда можно удовлетворить заданные условия, используя функцию (7.6), поэтому приходится применять более сложную передаточную функцию (7.7). Коэффициент усиления в этом случае вычисляют по формуле (7.12),

а постоянные времени T_1 и T_2 в соответствии с выражениями

$$T_2 = \frac{KC_2}{4} \left(\sqrt{\frac{K}{\omega_{cp}}} - 1 \right)^{-1}; \quad T_1 = T_2 \sqrt{\frac{K}{\omega_{cp}}}. \quad (7.19)$$

Постоянную времени T_3 рассчитывают по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} \omega_{cp} T_1 + 2\operatorname{arctg} \omega_{cp} T_2 - \operatorname{arctg} \omega_{cp} T_3 - \\ - \sum_{i=4}^n \operatorname{arctg} \omega_{cp} T_i. \quad (7.20)$$

Аналогичным образом определяются параметры желаемых передаточных функций статических систем РА (7.4) и (7.5) и систем с астатизмом второго порядка (7.8).

§ 7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

После выбора и определения параметров желаемой передаточной функции разомкнутой системы находят передаточные функции корректирующих устройств, предварительно определив передаточную функцию функционально необходимых устройств проектируемой системы. К таким устройствам относятся, например, фазовый детектор и перестраиваемый генератор в системе ФАПЧ, гетеродин и частотный дискриминатор в системе АПЧ, угловой дискриминатор и антенна с исполнительным устройством и усилителем мощности в системе автоматического сопровождения цели РЛС.

Передаточную функцию разомкнутой системы без корректирующих устройств, составленную из передаточных функций функционально необходимых устройств системы, будем называть *исходной передаточной функцией*.

Включение в систему РА корректирующих устройств означает введение в алгоритм управления, формируемого регулятором системы, дополнительных сигналов, пропорциональных сигналу ошибки, производным и интегралам от него, а также сигналов, пропорциональных производным от выходного сигнала. С физической точки зрения введение дополнительных сигналов приводит к компенсации влияния на качество работы системы РА наиболее инерционных устройств системы, в результате чего и достигаются заданные показатели качества работы системы.

Различают три способа включения корректирующих устройств: последовательный (рис. 7.2, а); параллельный (рис. 7.2, б) и по схеме с обратной связью (рис. 7.2, в). Выбор того или иного способа включения корректирующего устройства зависит от удобства технической реали-

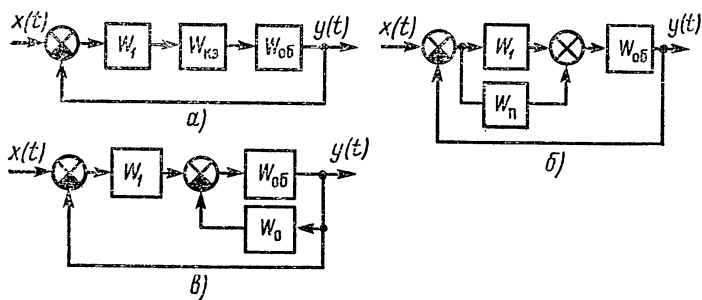


Рис. 7.2. Способы включения корректирующих устройств:
а — последовательный; б — параллельный; в — по схеме с обратной связью

зации и требований к стабильности характеристик системы РА.

Синтез систем РА основан на определении передаточной функции корректирующего устройства, включенного последовательно в цепь сигнала ошибки системы. Передаточная функция этого устройства должна быть выбрана такой, чтобы выполнялось условие

$$W_{\text{рж}}(p) = W_{\text{ри}}(p) W_{\text{кз}}(p), \quad (7.21)$$

где $W_{\text{ри}}(p)$ — передаточная функция исходной части разомкнутой системы; $W_{\text{кз}}(p)$ — передаточная функция последовательного корректирующего звена.

Из последнего выражения найдем, что

$$W_{\text{кз}}(p) = W_{\text{рж}}(p) / W_{\text{ри}}(p). \quad (7.22)$$

Следовательно, чем больше звеньев исходной передаточной функции включено в желаемую передаточную функцию системы, тем проще передаточная функция корректирующего звена. Число звеньев исходной функции, которые можно ввести в желаемую передаточную функцию, определяется заданным запасом устойчивости по фазе.

Если в системе РА применяется корректирующее уст-

ройство, включенное в цепь обратной связи, то его передаточная функция

$$W_{\text{рж}}(p) = W_{\text{ри}}(p) W_{\text{кз}}(p) = \frac{W_{\text{р}}(p)}{1 + W_{\text{об}}(p) W_0(p)}, \quad (7.23)$$

откуда

$$W_0(p) = \frac{1}{W_{\text{об}}(p)} \left[\frac{1}{W_{\text{кз}}(p)} - 1 \right], \quad (7.24)$$

где $W_0(p)$ — передаточная функция корректирующего устройства в цепи обратной связи; $W_{\text{об}}(p)$ — передаточная функция объекта управления (устройств, охваченных обратной связью).

Если используют корректирующее устройство, включенное параллельно с каким-либо элементом системы, то его передаточная функция с учетом рис. 7.2

$$W_{\text{рж}}(p) = W_{\text{ри}}(p) W_{\text{кз}}(p) = W_{\text{ри}}(p) + W_{\text{п}}(p) W_{\text{об}}(p). \quad (7.25)$$

Тогда

$$W_{\text{п}}(p) = W_1(p) [W_{\text{кз}}(p) - 1], \quad (7.26)$$

где $W_{\text{п}}(p)$ — передаточная функция параллельного корректирующего устройства; $W_1(p)$ — передаточная функция цепи сигнала ошибки.

В современных системах РА применяются все три способа включения корректирующих устройств. Это объясняется тем, что в ряде случаев передаточная функция одного устройства получается настолько сложной, что ее трудно реализовать технически. Кроме того, для улучшения стабильности работы систем РА относительно изменений условий окружающей среды и колебаний напряжений источников питания целесообразно наиболее инерционные и нестабильные устройства системы охватить обратной связью. При этом передаточная функция последовательного корректирующего устройства, вычисленная по формуле (7.22), имеет вид

$$W_{\text{кз}}(p) = W_{\text{кз1}}(p) W_{\text{кз2}}(p). \quad (7.27)$$

Один из сомножителей этого выражения, например первый, реализуется с помощью последовательного корректирующего устройства, а второй — эквивалентного корректирующего устройства в цепи обратной связи, передаточная функция которого определяется по формуле (7.24).

При синтезе систем РА часто оказывается, что передаточные функции корректирующих устройств не удовле-

творяют условию физической реализуемости. Очевидно, что в таких случаях желаемая передаточная функция из-за упрощения передаточных функций корректирующих устройств может быть реализована лишь приближенно. При этом необходимо обеспечить, чтобы ЛЧХ разомкнутой системы в области низких и средних частот совпадали с желаемыми ЛЧХ, расхождение характеристик допустимо только в области высоких частот. После упрощения передаточных функций корректирующих устройств необходимо построить ЛЧХ спроектированной системы РА и проверить выполнение заданных показателей качества работы.

Обычно в системах РА применяют корректирующие устройства на постоянном токе. Корректирующие устройства на переменном токе используют редко, так как они сложны и для их нормальной работы требуются источники энергии с высокой стабильностью частоты, что в ряде случаев, особенно в системах РА летательных аппаратов, не выполнимо. Ниже рассматриваются корректирующие устройства постоянного тока.

На рис. 7.3, а, б показаны схема и ЛЧХ звена с отставанием по фазе, которое используется в системах РА как

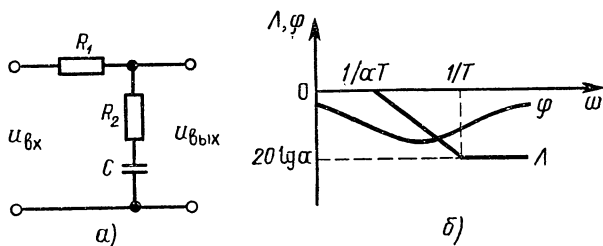


Рис. 7.3. Корректирующее звено с отставанием по фазе:
а — схема; б — ЛЧХ

последовательное корректирующее устройство. Его передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{1 + pT}{1 + p\alpha T}, \quad (7.28)$$

где $T = R_2 C$ — постоянная времени звена; $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ — постоянный коэффициент.

На рис. 7.4, а, б представлены схема и ЛЧХ последовательного корректирующего звена с опережением по фа-

зе, передаточная функция которого

$$W(p) = \beta \frac{1 + pT}{1 + p\beta T}, \quad (7.29)$$

где $T = R_1 C$; $\beta = R_2 / (R_1 + R_2)$.

В системах РА применяют также последовательное комбинированное звено, схема которого и ЛЧХ изображены на рис. 7.5, а, б. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}{(1 + pT_1)(1 + pT_4)}. \quad (7.30)$$

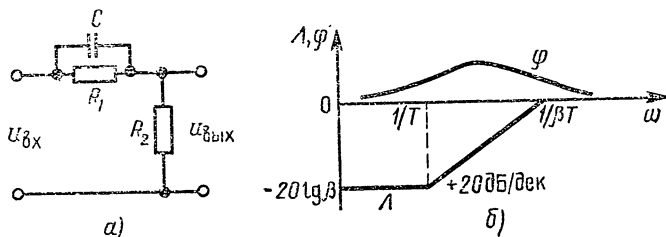


Рис. 7.4. Корректирующее звено с опережением по фазе:
а — схема; б — ЛЧХ

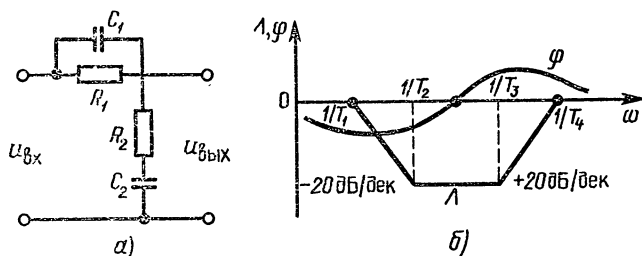


Рис. 7.5. Комбинированное корректирующее звено:
а — схема; б — ЛЧХ

Сопротивления и емкости выбирают такими, чтобы выполнялось условие $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$. С этой целью необходимо, чтобы $C_2 > C_1$ и $R_1 > R_2$. Тогда сопротивления и емкости звена рассчитывают по известным постоянным времени

$$T_1 = R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad T_3 = R_1 C_1; \\ T_4 = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2} \approx \frac{R_1 C_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (7.31)$$

В качестве корректирующих обратных связей используют жесткие и гибкие связи.

Жесткая обратная связь не содержит дифференцирующих звеньев. Рассмотрим ее влияние на характеристики отдельных звеньев. Если жесткой обратной связью охватить инерционное звено, то, согласно (4.5),

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT},$$

где $k = k_1 / (1 + k_1 k_0)$; $T = T_1 / (1 + k_1 k_0)$; k_1 , T_1 — коэффициент передачи и постоянная времени инерционного звена, охваченного обратной связью; k_0 — коэффициент передачи обратной связи.

Таким образом, охват инерционного звена жесткой обратной связью не изменяет его характера, однако коэффициент усиления и постоянная времени уменьшаются в $1 + k_1 k_0$ раз.

Если жесткой обратной связью с коэффициентом передачи k_0 охватить интегрирующее звено с коэффициентом передачи k_1 , то получим инерционное звено с параметрами $k = 1/k_0$, $T = 1/(k_1 k_0)$ (изменяется тип звена). Следовательно, такую связь необходимо использовать в тех случаях, когда требуется понизить порядок астатизма, т. е. исключить в системе влияние интегрирующего звена.

Гибкая обратная связь содержит дифференцирующие звенья, поэтому она действует только в переходном процессе, что не снижает точности системы в установившемся режиме. Оценим влияние гибкой обратной связи на характеристики различных звеньев. Если такой связью с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{pT_0}{1 + pT_0} \quad (7.32)$$

охватить безынерционное звено, то получим звено с передаточной функцией

$$W_1(p) = k_1 \frac{1 + pT_0}{1 + pT_0(1 + k_1)}, \quad (7.33)$$

где k_1 — коэффициент передачи безынерционного звена.

Таким образом, охват безынерционного звена гибкой обратной связью эквивалентен включению в цепь сигнала ошибки системы последовательного звена с отставанием по фазе.

Если гибкой обратной связью с передаточной функцией

ей (7.32) охватить интегрирующее звено, то

$$W(p) = \frac{k}{p} \frac{1 + pT_0}{1 + pT}, \quad (7.34)$$

где $k = \frac{k_1}{1 + k_1 T_0}$; $T = \frac{T_0}{1 + k_1 T_0}$; k_1 — коэффициент передачи интегрирующего звена.

Из выражения (7.34) следует, что охват интегрирующего звена гибкой обратной связью эквивалентен последовательному включению в цепь сигнала ошибки системы звена с опережением по фазе, при этом астатизм системы РА не снижается.

Для создания такого вида связи используются тахогенераторы, гироскопические датчики частоты вращения, RC -цепи. На рис. 7.6, а показана схема RC -цепи,

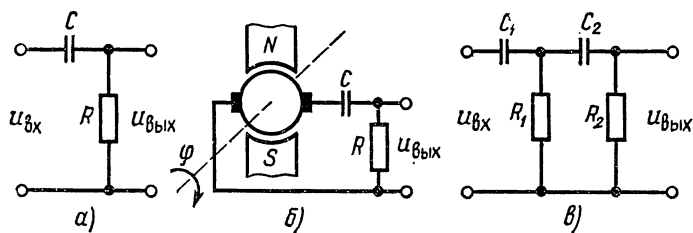


Рис. 7.6. Гибкие обратные связи:

а — электрическая RC -цепь; б — с электромеханическим датчиком; в — двойная RC -цепь

передаточная функция которой определяется (7.32). Сигнал на выходе такой цепи в определенном диапазоне частот пропорционален первой производной $u_{\text{вых}}(t)$.

В системах РА применяются гибкие обратные связи, выходной сигнал которых пропорционален второй производной входного сигнала обратной связи. Такая обратная связь (рис. 7.6, б) может быть сформирована с помощью тахогенератора и дифференцирующей RC -цепи, если входным сигналом обратной связи является угол поворота, или с помощью RC -цепи, изображенной на рис. 7.6, в, если на входе подается сигнал постоянного тока. Передаточная функция такой цепи

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_1 \right] p + 1}, \quad (7.35)$$

где $T_1 = R_1 C_1$; $T_2 = R_2 C_2$.

Если $R_1 \ll R_2$, то приближенно можно принять, что

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (7.36)$$

Пример 7.1. Синтезировать систему автоматического сопровождения цели РЛС. Структурная схема системы изображена на рис. 5.11. Найти передаточные функции корректирующих устройств из условия обеспечения в системе полосы пропускания, равной 10 с^{-1} . Показатель колебательности не превышает 1,4, ошибка по положению равна нулю, ошибка по скорости — не более $0,175 \cdot 10^{-2}$ рад и ошибка по ускорению — не более $0,87 \cdot 10^{-2}$ рад при максимальных значениях производных сигнала $0,175 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ и $0,35 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}$.

Решение. Передаточная функция исходной части системы

$$W_{\text{ри}}(p) = W_{\text{п}}(p) W_{\text{фл}}(p) W_{\text{ум}}(p) W_{\text{А}}(p), \quad (7.37)$$

где $W_{\text{п}}(p) = \frac{k_{\text{п}}}{1 + pT_{\text{п}}}$; $W_{\text{фл}}(p) = \frac{k_{\text{фл}}}{1 + pT_{\text{фл}}}$; $W_{\text{ум}}(p) = \frac{k_{\text{ум}}}{1 + pT_{\text{ум}}}$; $W_{\text{А}}(p) = \frac{k_{\text{А}}}{p(1 + pT_{\text{м}})}$ — передаточные функции приемника, фазового детектора, усилителя мощности и антенны с двигателем и редуктором.

Параметры устройств исходной части системы: $k_{\text{п}} = 0,035 \text{ В/рад}$; $k_{\text{фл}} = 0,8$; $k_{\text{ум}} = 10$; $k = 143 \text{ рад/(с} \cdot \text{В)}$; $T_{\text{п}} = T_{\text{фл}} = T_{\text{ум}} = 0,01 \text{ с}$; $T_{\text{м}} = 0,02 \text{ с}$.

Коэффициент передачи исходной части системы

$$k_{\text{и}} = k_{\text{п}} k_{\text{фл}} k_{\text{ум}} k_{\text{А}} = 4 \quad (7.38)$$

С учетом требований к системе и формул (7.9) — (7.12)

$$\Delta\varphi = 0,785 \text{ рад}; \quad \omega_{\text{ср}} = 7 \text{ с}^{-1}; \quad C_0 = 0; \quad C_1 = 0,01 \text{ с}; \\ C_2 = 0,05 \text{ с}^2; \quad K = 100 \text{ с}^{-1}.$$

В качестве желаемой передаточной функции разомкнутой системы примем функцию (7.7). Все сопряженные частоты передаточных функций устройств исходной части системы автоматического сопровождения (7.37) больше требуемой частоты среза, поэтому для упрощения корректирующих устройств, включим передаточную функцию исходной части системы в состав желаемой передаточной функции. В результате получим

$$W_{\text{рж}}(p) = \frac{K(1 + pT_2)^2}{p(1 + pT_1)^2(1 + pT_3)(1 + pT_{\text{п}})(1 + pT_{\text{фл}})(1 + pT_{\text{ум}})(1 + pT_{\text{м}})} \rightarrow \quad (7.39)$$

Постоянные времена T_1 , T_2 и T_3 вычислим по формулам (7.19) и (7.20). Тогда $T_1 = 1,7 \text{ с}$; $T_2 = 0,45 \text{ с}$; $T_3 = 0,015 \text{ с}$.

Так как значение T_3 незначительно отличается от постоянной времени двигателя $T_{\text{м}} = 0,02 \text{ с}$, то для упрощения корректирующего устройства примем $T_3 = T_{\text{м}}$.

Передаточную функцию последовательного корректирующего устройства найдем, используя выражение (7.22):

$$W_{\text{кз}}(p) = k_{\text{кз}} \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1} \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1}, \quad (7.40)$$

где $k_{кз} = K/K_n$ — коэффициент передачи корректирующего звена; K_n — коэффициент передачи исходной части системы.

Первый сомножитель в (7.40) реализуем в виде последовательного корректирующего устройства, включенного после фазового детектора, а второй — через эквивалентную обратную связь, передаточную функцию которой рассчитаем по формуле (7.24). Таким образом,

$$W_0(p) = K_0 \frac{p^2 (1 + pT_y) (1 + pT_m)}{1 + pT_2} \approx \frac{k_0 p^2}{1 + pT_2}, \quad (7.41^*)$$

где $k_0 = (T_1 - T_2)/(k_y k_A)$ — коэффициент передачи цепи обратной связи.

В выражении (7.41) пренебрегли постоянными времени T_y и T_m , так как соответствующие им сопряженные частоты намного больше

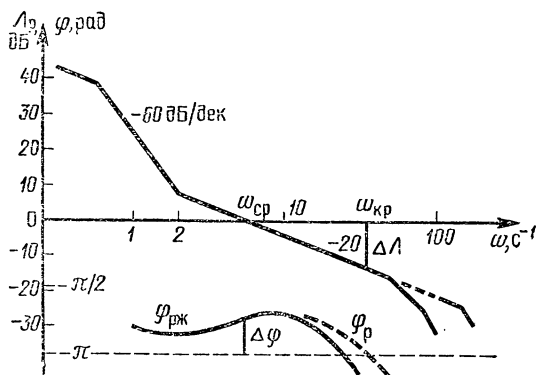


Рис. 7.7. ЛЧХ системы автосопровождения цели РЛС

частоты среза. Обратная связь с передаточной функцией (7.41) реализуется с помощью тахогенератора и дифференцирующей RC -цепи (рис. 7.6.б) с постоянной времени, равной T_2 . Передаточная функция такой обратной связи

$$W_0(p) = k_{y0} k_{тг} p W_d(p) = k_0 \frac{p^2 T_2}{1 + pT_2}, \quad (7.42)$$

где $k_{тг}$ — коэффициент передачи тахогенератора; $k_{y0} = k_0/(k_{тг} T_2)$ — коэффициент усиления усилителя в цепи обратной связи.

Так как при синтезе системы автоматического сопровождения были допущены упрощения, то необходимо проверить выполнение заданных требований. С этой целью на рис. 7.7 построены ЛЧХ спроектированной системы и ЛЧХ, соответствующие передаточной функции (7.39). Из сравнений этих характеристик видно, что все заданные показатели качества работы системы автоматического сопровождения цели выполняются.

§ 7.4. СИНТЕЗ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ранее при динамическом синтезе систем РА полагали, что характеристики управляющих воздействий и помех известны, т. е. заданы их математические ожидания и спектральные плотности случайных составляющих.

На практике это не всегда так. Характеристики воздействий обычно известны не полностью. Кроме того, они изменяются в процессе работы системы, поэтому показатели качества работы могут оказаться ниже расчетных.

Построение систем РА с использованием адаптивных систем позволяет исключить зависимость показателей качества работы от изменения характеристик воздействий и нестабильности параметров устройств. Адаптивные системы анализируются в гл. 13, здесь же рассмотрим синтез *робастных систем* (от английского слова *robust* — грубый), в которых показатели качества работы можно обеспечить не ниже заданных. Техническая реализация таких систем РА по сравнению с адаптивными намного проще, что является их существенным преимуществом.

Синтез робастных систем может быть выполнен различными методами [14]. Применительно к задачам синтеза систем РА целесообразно использовать метод, основанный на известных средних квадратических значениях управляющего воздействия и его производных. Данный метод не связан с конкретной формой спектральной плотности управляющего сигнала, поэтому ее изменение не приводит к несоблюдению точности работы системы РА.

Рассматриваемый метод синтеза систем РА сводится к выбору частотной характеристики ошибки из условия не превышения средней квадратической ошибкой заданного значения. После этого можно сформулировать требования к частотной характеристике разомкнутой системы.

Дисперсия ошибки относительно управляющего воздействия в соответствии с выражением (6.20)

$$\sigma_{ex}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq D_{c0}, \quad (7.43)$$

где $W_e(j\omega)$ — частотная характеристика ошибки; D_{c0} — допустимое значение дисперсии ошибки.

Представим квадрат АЧХ ошибки в следующем виде:

$$|W_e(j\omega)|^2 = c_0 + c_1 \omega^2 + c_2 \omega^4 + \dots + c_n \omega^{2n}. \quad (7.44)$$

Тогда дисперсия ошибки (7.43)

$$\sigma_{ex}^2 = c_0 D_0 + c_1 D_1 + c_2 D_2 + \dots + c_n D_n, \quad (7.45)$$

где D_0 — дисперсия управляющего воздействия; D_i — дисперсии производных; c_i — постоянные коэффициенты.

Задача синтеза системы состоит в выборе характеристики $W_e(j\omega)$, удовлетворяющей условию (7.43). Если известна только дисперсия управляющего воздействия D_0 , то из выражения (7.45) следует, что $c_0 = D_{e0}/D_0$ и частотная характеристика ошибки проектируемой системы должна удовлетворять условию

$$|W_e(j\omega)| \leq |W_{e0}(j\omega)| = \sqrt{\frac{D_{e0}}{D_0}} = \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_0}, \quad (7.46)$$

где $|W_{e0}(j\omega)|$ — АЧХ ошибки, составленная по априорным сведениям об управляющем воздействии.

Таким образом, ошибка не должна превышать значения (7.46) в диапазоне частот, в котором возможны спектральные составляющие управляющего воздействия.

В том случае, когда известна только дисперсия первой производной управляющего воздействия D_1 , то $c_1 = D_{e0}/D_1$ и частотная характеристика ошибки проектируемой системы должна удовлетворять условию

$$|W_e(j\omega)| \leq |W_{e0}(j\omega)| = \omega \sqrt{\frac{D_{e0}}{D_1}} = \omega \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_1}. \quad (7.47)$$

Если известна только дисперсия второй производной управляющего воздействия, то

$$|W_e(j\omega)| \leq |W_{e0}(j\omega)| = \omega^2 \sqrt{\frac{D_{e0}}{D_2}} = \omega^2 \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_2}. \quad (7.48)$$

От ограничений, накладываемых на АЧХ ошибки, можно перейти к требованиям, которым должна удовлетворять частотная характеристика разомкнутой проектируемой системы. Из выражений (4.10) и (4.14) следует, что

$$W_p(j\omega) = W_z(j\omega)/W_e(j\omega). \quad (7.49)$$

Так как на частотах меньше частоты среза $|W_z(j\omega)| \approx 1$ (см. § 6.3), то условия (7.46) — (7.48) выполняются, если

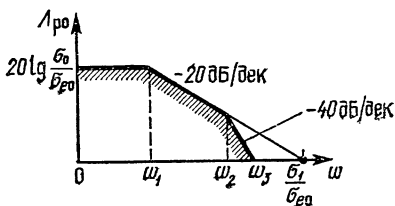
$$|W_{p0}(j\omega)| \geq \frac{1}{|W_{e0}(j\omega)|}, \quad (7.50)$$

а ФЧХ разомкнутой системы может быть произвольной.

На частотах больше частоты среза $|W_z(j\omega)| \approx |W_p(j\omega)|$ и поэтому вид частотной характеристики разомкнутой системы не влияет на точность системы РА и может быть произвольным, но при этом требования к запасам устойчивости должны соблюдаться.

Выполнение условия (7.50) гарантирует, что динамическая ошибка будет не выше заданной.

Очевидно, что выражениям (7.46) и (7.50) на рис. 7.8 соответствует прямая линия, параллельная оси частот и отстоящая от нее на $20 \lg \sigma_0/\sigma_{e0}$, условиям (7.47) и (7.50) — прямая с наклоном -20 дБ/дек, которая пересекает ось абсцисс на частоте, равной σ_1/σ_{e0} , а условиями (7.48) и (7.50) — прямая с наклоном -40 дБ/дек, которая начинается на оси абсцисс с частоты $\sqrt{\sigma_2/\sigma_{e0}}$. Эти прямые образуют запретную область, в которой не должна располагаться низко-частотная часть логарифмической АЧХ разомкнутой проектируемой системы РА. Частоты, соответствующие точкам излома запретной области, вычисляются по формулам



$$\omega_1 = \sigma_1/\sigma_0; \quad \omega_2 = \sigma_2/\sigma_1;$$

$$\omega_3 = \sqrt{\sigma_2/\sigma_{e0}}. \quad (7.51)$$

Рис. 7.8. ЛЧХ запретной области относительно динамической ошибки

Рассмотрим ограничения на вид АЧХ разомкнутой проектируемой системы из-за действия помехи, спектральная плотность которой известна и постоянна в пределах полосы пропускания системы РА (помеха в виде белого шума). Тогда дисперсия ошибки из-за действия помехи

$$\sigma_{еп}^2 = N_{п} f_{эф}, \quad (7.52)$$

где $f_{эф}$ — эффективная полоса пропускания системы; $N_{п}$ — уровень спектральной плотности белого шума помехи.

Задача синтеза системы РА заключается в том, чтобы суммарная средняя квадратическая ошибка системы не превышала допустимого значения:

$$\sigma_{\epsilon} = \sqrt{\sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2} \leq \sigma_{e0}, \quad (7.53)$$

где $\sigma_{\text{еп}}$ — средняя квадратическая ошибка из-за действия помехи.

Условие (7.53) накладывает противоречивые требования к проектируемой системе РА. С одной стороны, средняя квадратическая ошибка относительно сигнала должна быть меньше $\sigma_{\text{е0}}$, так как в противном случае не будет выполнено условие (7.53), а с другой — не должна превышать этого значения и составляющая ошибки $\sigma_{\text{еп}}$. Поэтому эффективная полоса пропускания проектируемой системы

$$f_{\text{эф}} \leq \sigma_{\text{е0}}^2 / N_{\text{п}}. \quad (7.54)$$

Таким образом, при синтезе системы РА необходимо обеспечить одновременное удовлетворение условий (7.50) и (7.54). Если эти условия выполнить одновременно невозможно, то при заданном значении $\sigma_{\text{е0}}$ решения задачи проектирования робастной системы РА не существует.

Определим, какие ограничения накладывает условие (7.54) на АЧХ разомкнутой системы. С этой целью рассмотрим типовую логарифмическую АЧХ, низкочастотные участки которой содержат асимптоты с наклонами -20 , -40 или -60 дБ/дек. При этом всегда в области частоты среза наклон логарифмической АЧХ равен -20 дБ/дек, так как только в этом случае можно обеспечить необходимый запас устойчивости по фазе.

В [14] показано, что для систем РА с такими наклонами логарифмической АЧХ разомкнутой системы эффективная полоса пропускания системы с достаточной для практики точностью определяется по формуле

$$f_{\text{эф}} = l\omega_0/2, \quad (7.55)$$

где ω_0 — частота, соответствующая точке пресечения асимптоты логарифмической АЧХ с наклоном -20 дБ/дек с осью абсцисс; l — коэффициент, равный 1, 2 или 3, в зависимости от наклона асимптоты, для которой определена частота ω_0 .

Согласно (7.54) и (7.55),

$$\omega_0 \leq 2\sigma_{\text{е0}}^2 / (lN_{\text{п}}). \quad (7.56)$$

Это выражение определяет крайнее допустимое положение логарифмической АЧХ разомкнутой проектируемой системы РА, или что то же самое, границу запретной области, в которой не должна располагаться логарифмическая АЧХ разомкнутой системы. Построение запретной

области осуществляется следующим образом. На оси абсцисс (рис. 7.9) через точку $\omega_0 = 2\sigma_{e0}^2/N_{\Pi}$ проводят прямую с наклоном -20 дБ/дек, а через точки $\omega_0/2$ и $\omega_0/3$ прямые с наклонами -40 и -60 дБ/дек. В результате формируется запретная область, заштрихованная на рис. 7.9.

Требования к точности работы проектируемой системы РА относительно возмущающего воздействия выпол-

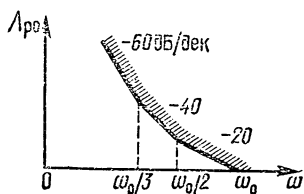


Рис. 7.9. ЛЧХ запретной области относительно возмущающего воздействия

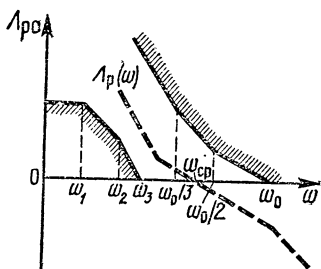


Рис. 7.10. ЛЧХ общей запретной области

няются, если ее логарифмическая АЧХ не заходит в запретную область.

На рис. 7.10 показаны две запретные области, определенные ранее. Для обеспечения в проектируемой системе РА заданной точности необходимо, чтобы выбранная логарифмическая АЧХ разомкнутой системы не располагалась в запретных областях и удовлетворяла требованиям к запасам устойчивости. На рис. 7.10 такая характеристика показана пунктиром. Если запретные области на рис. 7.10 перекрываются, то синтез робастной системы при заданных точностных характеристиках не возможен.

В [14] показано, что для гарантированного получения заданной точности должен быть обеспечен некоторый интервал между левой и правой запретными областями, минимальная ширина этого интервала должна составлять около четверти декады.

§ 7.5. КОМПЛЕКСНЫЕ СИСТЕМЫ

Системы РА, которые формируются не только на базе радиотехнических устройств, но и на базе устройств других типов (например, гироскопических приборов, инер-

циальных систем и др.), называют *комплексными*. Подобные системы широко применяются при навигации для определения координат и параметров движения различных объектов (например, для измерения скорости летательного аппарата и угла сноса относительно расчетной

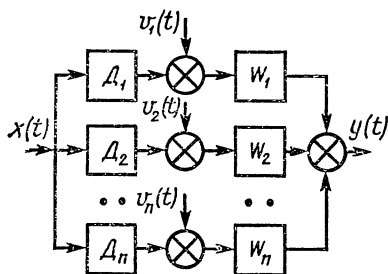


Рис. 7.11. Типовая структурная схема комплексной измерительной системы РА

траектории используется гироскопическая система с доплеровским измерителем). Для измерения высоты полета применяются барометрический и радиолокационный высотомеры. Для комплексной системы РА характерно наличие нескольких параллельно работающих каналов с различными датчиками измерения одной и той же информации. На рис. 7.11 показана типовая структурная схема комплекс-

ной измерительной системы, в которой входной сигнал $x(t)$ измеряется разнотипными датчиками D_1, D_2, \dots, D_n с передаточными функциями $W_{di}(p)$, где $i=1, 2, \dots, n$; воздействия $v_i(t)$ учитывают шумы погрешностей датчиков. Комплексирование системы заключается в вычисле-

нии оценки $\hat{x}(t)$ с точностью, превышающей достижимую при раздельном использовании датчиков. Из схемы рис. 7.11 следует, что преобразование Лапласа для оценки

$$\hat{x}(p) = \sum_{i=1}^n W_{di}(p) W_{\phi i}(p) x(p) + \sum_{i=1}^n W_{di}(p) W_{\phi i}(p) V_i(p). \quad (7.57)$$

Преобразование Лапласа для ошибки

$$E(p) = X(p) - \hat{X}(p) = [1 - \sum_{i=1}^n W_{di}(p) W_{\phi i}(p)] X(p) - \sum_{i=1}^n W_{di}(p) W_{\phi i}(p) V_i(p). \quad (7.58)$$

Из последнего выражения следует, что если передаточные функции каналов системы выбирают из условия

$$\sum_{i=1}^n W_{di}(p) W_{\phi i}(p) = 1, \quad (7.59)$$

то выражения (7.57) и (7.58) принимают вид

$$\hat{X}(p) = X(p) + \sum_{i=1}^n W_{\text{д}i}(p) W_{\text{ф}i}(p) V_i(p);$$

$$E(p) = - \sum_{i=1}^n W_{\text{д}i}(p) W_{\text{ф}i}(p) V_i(p). \quad (7.60)$$

Таким образом, ошибка комплексной системы не зависит от характеристик измеряемого сигнала и определяется только погрешностями датчиков.

Равенство (7.59) называют *условием инвариантности*, а систему, в которой удается его реализовать, — *инвариантной относительно ошибки измеряемого сигнала*.

Условие инвариантности накладывает ограничения только на суммарную передаточную функцию, но не на передаточные функции отдельных каналов, поэтому при синтезе комплексной системы остается некоторая свобода выбора передаточных функций отдельных каналов, что позволит уменьшить ошибку из-за погрешностей датчиков.

Необходимо отметить, что условие инвариантности (7.59) в динамических системах удастся выполнить лишь приближенно, поэтому в реальной системе динамическая ошибка не равна нулю (она может быть значительно уменьшена по сравнению с ошибками измерения при использовании одного канала измерения).

Следует также иметь в виду, что рассмотренная система, которую принято называть *многоканальной схемой фильтрации*, чувствительна к отклонению параметров устройств от расчетных значений, поэтому при проектировании таких систем необходимо обеспечить стабильность параметров ее устройств.

Рассмотрим еще один класс комплексных систем РА, основой которых является обычная система РА с обратной связью, а сигнал с нерадиотехнического датчика, с помощью которого измеряется управляющее воздействие $x(t)$, вводится в замкнутый контур после дискримина-

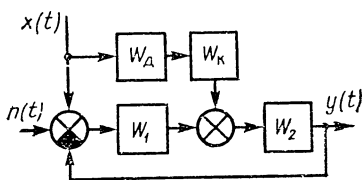


Рис. 7.12. Структурная схема комплексной системы РА

натора (рис. 7.12). В таких системах удается значительно повысить точность системы РА относительно управляющего воздействия без ухудшения средней квадратической ошибки из-за действия помех.

Из рис. 7.12 следует, что преобразование Лапласа для выходного сигнала

$$Y(p) = \frac{W_1(p) W_2(p) + W_K(p) W_2(p)}{1 + W_P(p)} X(p) + \frac{W_P(p)}{1 + W_P(p)} n(p); \quad (7.61)$$

для ошибки системы

$$E(p) = X(p) - Y(p) = \frac{1 - W_K(p) W_2(p)}{1 + W_P(p)} X(p) - \frac{W_P(p)}{1 + W_P(p)} n(p). \quad (7.62)$$

Если выполняется условие инвариантности

$$W_K(p) = 1/W_2(p), \quad (7.63)$$

то выражения (7.61) и (7.62) принимают вид

$$\begin{aligned} Y(p) &= X(p) + W_3(p) n(p); \\ E(p) &= -W_3(p) n(p), \end{aligned} \quad (7.64)$$

где $W_3(p)$ — передаточная функция замкнутого контура системы РА.

Из выражений (7.64) следует, что ошибка относительно управляющего воздействия равна нулю или инвариантна относительно этого сигнала. Путем выбора цепи сигнала ошибки системы с передаточной функцией $W_1(p)$ нетрудно сформировать замкнутый контур системы с учетом требуемой фильтрации помех.

Датчик, измеряющий управляющее воздействие, и последовательно включенный с ним фильтр с передаточной функцией $W_K(p)$ образует цепь компенсации комплексной системы РА. Эта цепь не формирует замкнутого контура, а, следовательно, не влияет на устойчивость комплексной системы.

Рассмотрим возможность реализации условия инвариантности (7.63). В реальных системах степень полинома числителя передаточных функций устройств всегда меньше степени полинома их знаменателя, поэтому функция (7.63) не удовлетворяет условию физической реализуемости и в данной системе РА инвариантность ошибки

относительно управляющего воздействия недостижима. Однако в подобных системах можно существенно повысить точность относительно управляющего воздействия при необходимой фильтрации помех, т. е. сделать системы широкополосными относительно управляющего сигнала и узкополосными относительно помехи.

Синтез комплексных систем РА можно выполнить с учетом следующих условий: 1) обеспечения нужных частотных характеристик системы; 2) повышения ее динамической точности работы. Проанализируем метод, который позволит повысить порядок астатизма в комплексной системе относительно управляющего воздействия по сравнению с порядком астатизма замкнутого контура. Передаточная функция ошибки системы, как следует из выражения (7.62),

$$W_{ек}(p) = \frac{1 - W_{к}(p) W_2(p)}{1 + W_p(p)} = W_e(p) [1 - W_{к}(p) W_2(p)], \quad (7.65)$$

где $W_e(p)$ — передаточная функция ошибки замкнутого контура.

Разложим передаточную функцию ошибки комплексной системы (7.65) в степенной ряд:

$$W_{ек}(p) = C_{0к} + C_{1к}p + \frac{1}{2} C_{2к}p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_{кк}p^k. \quad (7.66)$$

Аналогичным образом представим и второй сомножитель выражения (7.65):

$$1 - W_{к}(p) W_2(p) = D_0 + D_1p + \frac{1}{2} D_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!} D_{к}p^k. \quad (7.67)$$

Тогда передаточная функция ошибки комплексной системы с учетом выражения (6.8) примет вид

$$\begin{aligned} C_{0к} + C_{1к}p + \frac{1}{2} C_{2к}p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_{кк}p^k = & \left[C_0 + C_1p + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} C_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_{к}p^k \right] \left[D_0 + D_1p + \frac{1}{2!} D_2p^2 + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{1}{k!} D_{к}p^k \right], \end{aligned} \quad (7.68)$$

где $C_i, i=0, 1, \dots, k$ — коэффициенты ошибок передаточной функции ошибки замкнутого контура системы.

Приравняв в последнем выражении слагаемые при

одинаковых степенях p , найдем коэффициенты ошибок комплексной системы:

$$\begin{aligned} C_{0к} &= C_0 D_0; \\ C_{1к} &= C_0 D_1 + C_1 D_0; \\ C_{2к} &= C_0 D_2 + 2C_1 D_1 + C_2 D_0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.69)$$

Из формул (7.69) следует, что необходимый порядок астатизма обеспечивается, если соответствующее число коэффициентов D_i равно нулю. Из этих условий и определяется выражение для передаточной функции компенсации комплексной системы.

Подставим выражения

$$W_2(p) = \frac{c_e p^e + c_{e-1} p^{e-1} + \dots + c_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}; \quad (7.70)$$

$$W_k(p) = \frac{\alpha_q p^q + \alpha_{q-1} p^{q-1} + \dots + \alpha_0}{\tau_q p^q + \tau_{q-1} p^{q-1} + \dots + \tau_0} \quad (7.71)$$

в формулу (7.67). Тогда для получения астатизма первого порядка необходимо, чтобы передаточная функция цепи компенсации

$$W_k(p) = \alpha/\tau_0. \quad (7.72)$$

Коэффициенты этой функции определим из условия

$$D_0 = \frac{b_0 \tau_0 - \alpha_0 c_0}{b_0 \tau_0} = 0. \quad (7.73)$$

Для получения астатизма второго порядка нужно, чтобы передаточная функция цепи компенсации

$$W_k(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\tau_1 p + \tau_0}. \quad (7.74)$$

Коэффициенты функции найдем из условия (7.73) при

$$D_1 = \frac{b_1 \tau_0 + b_0 \tau_1 - \alpha_0 c_1 - \alpha_1 c_0}{\tau_0 b_0} = 0. \quad (7.75)$$

При последовательном определении коэффициентов передаточной функции (7.71) одни коэффициенты, например τ_i , выбирают из условия обеспечения требуемых характеристик комплексной системы, а коэффициенты α_i вычисляют согласно равенства нулю соответствующих коэффициентов D_i .

Коэффициенты τ_i передаточной функции цепи компенсации определяют инерционность цепи компенсации. Для выяснения их влияния на частотные характеристики пред-

ставим передаточную функцию комплексной системы в виде

$$W_{\text{кз}}(p) = W_{\text{з}}(p) \left[1 + \frac{W_{\text{к}}(p)}{W_1(p)} \right]. \quad (7.76)$$

Следовательно, наличие цепи компенсации в комплексной системе эквивалентно последовательному включению с замкнутым контуром корректирующего устройства с передаточной функцией

$$W_{\text{эк}}(p) = 1 + \frac{W_{\text{к}}(p)}{W_1(p)}. \quad (7.77)$$

Из выражения (7.77) следует, что чем меньше инерционность цепи компенсации, тем больший опережающий эффект создается корректирующим устройством. При этом полоса пропускания комплексной системы РА относительно управляющего воздействия увеличивается.

Пример 7.2. Найти передаточную функцию цепи компенсации для системы автоматического сопровождения цели РЛС, рассмотренной в примере 7.1, если порядок астатизма в системе относительно воздействия, возникающего из-за колебаний летательного аппарата, равен двум.

Решение. Систему сформируем по схеме рис. 7.12, в которой передаточные функции определяются выражениями

$$W_1(p) = \frac{k_1(1 + pT_2)}{(1 + pT_{\text{п}})(1 + pT_{\text{фл}})(1 + pT_1)};$$

$$W_2(p) = \frac{c_1 p + c_0}{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p},$$

где $k_1 = k_{\text{п}} k_{\text{фл}} k_{\text{кз}}$; $c_1 = k_{\text{у}} k_{\text{А}} T_2$; $c_0 = k_{\text{у}} k_{\text{А}}$; $b_3 = T_{\text{у}} T_{\text{м}} T_2$;
 $b_2 = T_{\text{у}} T_{\text{м}} + T_2 T_{\text{м}}$; $b_1 = T_{\text{у}} + T_{\text{м}} + T_2 + k_{\text{у}} k_0 k_{\text{А}}$.

Воздействие, возникающее из-за колебаний летательного аппарата, измеряется гироскопическим датчиком угловой скорости, сигнал с которого является входным сигналом цепи компенсации.

Замкнутый контур рассматриваемой системы имеет первый порядок астатизма, поэтому для получения в комплексной системе астатизма второго порядка необходимо, как это следует из формул (7.69), чтобы коэффициент D_0 в разложении (7.67) был равен нулю. Для этого нужно, чтобы передаточная функция цепи компенсации была реализована в соответствии с (7.74). Параметры цепи вычисляются из условия $\alpha_0 = 0$ $D_0 = \frac{b_1 \tau_0 - c_0 \alpha_1}{b_1 \tau_0} = 0$. Из последнего вы-

ражения находим, что $\alpha_1 = b_1 \tau_0 / c_0$. Пусть $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 0,01$ с для того, чтобы полоса пропускания системы относительно воздействия, возникающего из-за колебаний летательного аппарата, была больше полосы пропускания замкнутого контура. При расчетных значениях параметров системы автоматического сопровождения, найденными

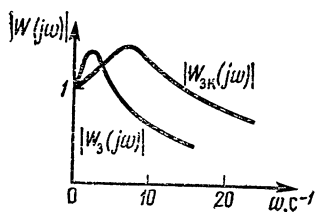


Рис. 7.13. АЧХ комплексной системы РА

в примере 7.1, передаточная функция цепи компенсации

$$W_k(p) = \frac{0,11p}{1 + 0,01p}.$$

Данная передаточная функция может быть реализована RC -цепью и усилителем с коэффициентом усиления, равным 11. Дальнейшее уменьшение коэффициента τ_1 с целью большего расширения полосы пропускания нецелесообразно, так как приводит к увеличению коэффициента усиления в цепи компенсации.

На рис. 7.13 показаны АЧХ замкнутого контура $|W_3(j\omega)|$ и комплексной системы $|W_{3к}(j\omega)|$, из которых видно, что введение цепи компенсации расширило полосу пропускания относительно воздействия, обусловленного колебаниями летательного аппарата, до 37 с^{-1} .

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 7

1. Поясните постановку задачи проектирования систем РА.
2. Укажите способы включения корректирующих устройств в системах РА.
3. Опишите основные схемы, применяемые в качестве дифференцирующих устройств.
4. Каким образом формируется передаточная функция разомкнутой проектируемой системы РА?
5. Как определяются передаточные функции корректирующих устройств?
6. В чем заключается синтез робастных систем РА?
7. Какие системы РА относятся к комплексным?
8. Как можно достичь повышения порядка астатизма в комплексных системах РА?

ГЛАВА 8

АНАЛИЗ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

§ 8.1. ВЕКТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ РА

Развитие высококачественных систем РА потребовало разработки новых методов их анализа и синтеза. Эти методы базируются на понятии пространства состояний. С математической точки зрения анализ систем в пространстве состояний означает использование методов матричного исчисления и векторного анализа.

Рассмотрим методику составления векторных дифференциальных уравнений для систем РА с одним входом и одним выходом, передаточная функция которых

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Такой передаточной функции соответствует дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_nx^{(n)}(t) + b_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + b_0x(t). \quad (8.1)$$

Введем следующее обозначение:

$$y(t) = z_1(t) + h_0 x(t). \quad (8.2)$$

Составим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) + h_1 x(t); \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + h_2 x(t); \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\dot{z}_n(t) = -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - \dots - a_{n-1} z_n(t) + h_n x(t).$$

Коэффициенты h_i находят из условия эквивалентности системы уравнений (8.3) исходному уравнению (8.1). Согласно (8.3),

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \dot{z}_1(t) - h_1 x(t); \\ z_3(t) &= \ddot{z}_1(t) - h_2 \dot{x}(t) - h_1 x(t); \\ &\dots\dots\dots \\ z_n(t) &= z^{(n-1)}_1(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \times \\ &\quad \times h_i x^{(n-1-i)}(t). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Продифференцировав $z_n(t)$ в (8.4) с учетом последнего уравнения системы (8.3), получим

$$z_1^{(n)}(t) - \sum_{i=1}^n h_i x^{(n-i)}(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_{i+1} + h_n x(t). \quad (8.5)$$

Подставив в последнее выражение соотношение (8.2) и сгруппировав слагаемые при одинаковых порядках производных от $z_1(t)$ в левой и от $x(t)$ в правой части, най-

дем дифференциальное уравнение системы в виде

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = h_0 x^{(n)}(t) + (h_1 + h_0 a_{n-1}) x^{(n-1)}(t) + \\ + (h_2 + h_0 a_{n-2} + h_1 a_{n-1}) x^{(n-2)}(t) + \dots + (h_n + h_0 a_0 + \\ + \dots + h_{n-1} a_{n-1}) x(t). \quad (8.6)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых порядках производных в уравнениях (8.1) и (8.6), запишем

$$\begin{aligned} h_0 &= b_n; \\ h_1 &= b_{n-1} - h_0 a_{n-1}; \\ h_2 &= b_{n-2} - h_0 a_{n-2} - h_1 a_{n-1}; \\ &\dots \end{aligned} \quad (8.7)$$

Из введенной системы уравнений (8.3) следует, что производные $z_i(t)$ не зависят от производных входного сигнала $x(t)$.

Переменные $z_i(t)$ в системе уравнений (8.3) можно рассматривать как составляющие вектора

$$\mathbf{Z}^T(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)],$$

где индекс T определяет операцию транспонирования матрицы.

Вектор $\mathbf{Z}(t)$ называют *вектором состояния системы*, а его составляющие $z_i(t)$ — *переменными состояниями*. В пространстве, осями координат которого являются переменные состояния, каждому моменту времени соответствует вектор $\mathbf{Z}(t)$. Величина и положение этого вектора с течением времени изменяются, в результате чего вектор $\mathbf{Z}(t)$ описывает кривую, называемую *траекторией движения системы в пространстве состояний*.

Систему уравнений (8.3) можно записать в виде следующего векторного дифференциального уравнения:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}x(t). \quad (8.8)$$

Выражение (8.2) определяет уравнение выхода системы

$$y(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{Z}(t) + h_0 x(t). \quad (8.9)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0, & -a_1, & -a_2, \dots, & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

— матрица системы размером $n \times n$;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

— матрица управления размером $n \times 1$;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

— матрица наблюдения размером $n \times 1$.

Элементы матрицы системы \mathbf{A} определяются структурной схемой системы и значениями ее параметров. Матрица управления \mathbf{B} характеризует влияние на переменные состояния входного сигнала, а матрица наблюдения \mathbf{C} — связь выходного сигнала системы с вектором состояния. Обычно не все составляющие вектора состояния являются наблюдаемыми сигналами, т. е. они могут быть измерены с помощью каких-либо датчиков, в то время как выходной сигнал всегда наблюдаем.

В реальных системах РА степень полинома числителя передаточной функции меньше степени полинома ее знаменателя, поэтому $h_0 = 0$ и ряд коэффициентов h_i оказывается равным нулю. При этом матрица управления

$$\mathbf{B}^T = [0, \dots, h_{n-m}, \dots, h_n],$$

где m — порядок полинома числителя передаточной функции системы.

В общем случае система РА имеет r входов и l выходов. Матрица системы \mathbf{A} не изменяется по сравнению с матрицей систем с одним входом. Матрица управления \mathbf{B} становится прямоугольной размером $n \times r$, а матрица наблюдения \mathbf{C} — прямоугольной размером $n \times l$.

На рис. 8.1 показана структурная схема системы РА, соответствующая векторному дифференциальному уравнению (8.8); двойные линии на рисунке характеризуют векторные связи. На рис. 8.2 изображена схема, составленная из интеграторов; введенные переменные состояния — это сигналы на выходах интеграторов.

Следует иметь в виду, что выбор переменных состояния это неоднозначная операция. Для иллюстрации это-

В этом случае выходной сигнал

$$y(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t). \quad (8.12)$$

Системе уравнений (8.11) соответствует векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{A}_F \mathbf{F}(t) + \mathbf{B}_F x(t). \quad (8.13)$$

Выходной сигнал системы (8.12) описывается векторным уравнением вида

$$y(t) = \mathbf{C}_F^T \mathbf{F}(t). \quad (8.14)$$

Здесь

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

— вектор состояния размером $n \times 1$;

$$\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

— матрица системы размером $n \times n$;

$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

— матрица управления размером $n \times 1$;

$$\mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— матрица наблюдения размером $n \times 1$.

Из сравнения уравнений (8.8) и (8.13) следует, что при математическом описании одного и того же динамического процесса различному выбору переменных состояния соответствуют различные матрицы системы, управле-

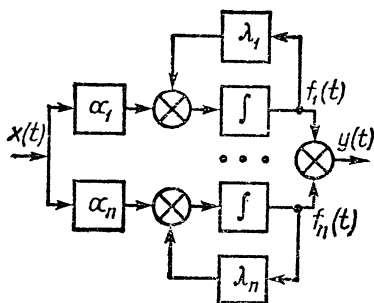


Рис. 8.3. Структурная схема системы РА в переменных состояния по полюсам

ния, наблюдения и различные векторные дифференциальные уравнения, каждое из которых полностью определяет выходной сигнал системы.

Ранее векторные дифференциальные уравнения были определены для стационарных систем РА. В нестационарных системах матрицы в уравнениях (8.8) и (8.9) будут переменными и векторные дифференциальные уравнения примут вид

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}(t) x(t); \quad (8.15)$$

$$y(t) = \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Z}(t) + h_0(t) x(t). \quad (8.16)$$

§ 8.2. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА

Найдем решение векторного дифференциального уравнения (8.15), которое, как известно, состоит из решения однородного уравнения и составляющей, обусловленной действием входного сигнала $x(t)$. Однородное уравнение получим из уравнения (8.15), положив $x(t) = 0$. В результате найдем, что

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{Z}(t). \quad (8.17)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\mathbf{Z}(t) = \Phi(t) \mathbf{Z}(t_0), \quad (8.18)$$

где $\Phi(t)$ — *фундаментальная матрица*; $\mathbf{Z}(t_0)$ — вектор, описывающий состояние системы в начальный момент времени t_0 .

Из выражения (8.18) следует, что при $t = t_0$ фундаментальная матрица

$$\Phi(t_0) = \mathbf{I}, \quad (8.19)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Подставив уравнение (8.18) в (8.17), найдем, что фундаментальная матрица удовлетворяет выражению

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t). \quad (8.20)$$

Проинтегрировав (8.20), получим

$$\Phi(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) dt \right]. \quad (8.21)$$

Определим вынужденную составляющую решения.

С этой целью положим, что

$$\mathbf{Z}(t) = \Phi(t) \mathbf{V}(t), \quad (8.22)$$

где $\mathbf{V}(t)$ — неизвестный вектор размером $n \times 1$.

Подставив (8.22) в исходное уравнение (8.15), найдем

$$\dot{\Phi}(t) \mathbf{V}(t) + \Phi(t) \dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t) \mathbf{V}(t) + \mathbf{B}(t) x(t).$$

С учетом (8.20) $\Phi(t) \dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{B}(t) x(t)$. Умножив слева последнее выражение на матрицу, обратную фундаментальной, получим

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \Phi^{-1}(t) \mathbf{B}(t) x(t).$$

Проинтегрировав это уравнение, определим неизвестный вектор

$$\mathbf{V}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{B}(\tau) x(\tau) d\tau. \quad (8.23)$$

Общее решение векторного уравнения (8.15) равно сумме (8.18) и (8.22). С учетом уравнения (8.23) оно имеет вид

$$\mathbf{Z}(t) = \Phi(t) \mathbf{Z}(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{B}(\tau) x(\tau) d\tau. \quad (8.24)$$

Функцию

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \quad (8.25)$$

называют *матрицей перехода системы РА*. Отметим некоторые ее свойства.

1. В начальный момент времени $t=t_0$ матрица перехода равна фундаментальной матрице

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t), \quad (8.26)$$

так как $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$.

2. При $t=\tau$ матрица перехода равна единичной матрице, так как

$$\Phi(t, t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t) = \mathbf{I}. \quad (8.27)$$

В общем случае вычислить матрицу перехода сложно. Обычно для ее определения используются численные методы.

Для стационарных систем РА нахождение матрицы перехода упрощается. Решение уравнения (8.17) принимает вид

$$\mathbf{Z}(t) = \Phi(t) \mathbf{Z}(t_0) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{Z}(t_0),$$

где $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ — матричная экспонента.

Матрица перехода в соответствии с выражением (8.25)

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}. \quad (8.28)$$

Фундаментальную матрицу для стационарной системы определим, применив преобразование Лапласа к уравнению (8.20). В результате получим

$$p\Phi(p) = A\Phi(p) + \Phi(0).$$

Из последнего выражения найдем, что фундаментальная матрица

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ [pI - A]^{-1} \}, \quad (8.29)$$

где $pI - A$ — *характеристическая матрица*, определитель которой позволяет определить характеристическое уравнение системы.

Очевидно, что матрица перехода зависит от выбора переменных состояния.

Пример 8.1. Найти матрицу перехода для системы РА, передаточная функция которой

$$W(p) = \frac{200}{(p+10)(p+20)}. \quad (8.30)$$

Решение. В качестве переменных состояния выберем выходной сигнал и его первую производную. Тогда передаточной функции (8.30) соответствует векторное дифференциальное уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -200, & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} x(t)$$

и уравнение выхода

$$y(t) = [1, 0] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрицы системы, управления и наблюдения принимают вид

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -200, & -30 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица

$$pI - A = \begin{bmatrix} p, & -1 \\ 200, & p+30 \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная характеристической (см. приложение П.4),

$$[pI - A]^{-1} = \frac{1}{(p+10)(p+20)} \begin{bmatrix} p+30, & 1 \\ -200, & p \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная матрица определяется выражением (8.29)

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-10t} - e^{-20t}, & 0, 1e^{-10t} - 0, 1e^{-20t} \\ -20e^{-10t} + 20e^{-20t}, & -e^{-10t} + 2e^{-20t} \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода в соответствии с (8.28)

$$\begin{aligned} \Phi(t - \tau) = \\ = \begin{bmatrix} 2e^{-10(t-\tau)} - e^{-20(t-\tau)}, & 0, 1e^{-10(t-\tau)} - 0, 1e^{-20(t-\tau)} \\ -20e^{-10(t-\tau)} + 20e^{-20(t-\tau)}, & e^{-10(t-\tau)} + 2e^{-20(t-\tau)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем вектор переменных состояния при действии на систему управляющего воздействия $x(t)=1(t)$ и нулевом начальном состоянии. В соответствии с выражением (8.24)

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 1 - 2e^{-10t} + e^{-20t} \\ 20e^{-10t} - 20e^{-20t} \end{bmatrix}.$$

Если в рассматриваемом примере переменными состояниями выбрать вектор $F(t)$ с составляющими $f_1(t)$ и $f_2(t)$, определяемые через полюсы системы, то матрицы системы, управления и наблюдения получаются следующими:

$$A_F = \begin{bmatrix} -10, & 0 \\ 0, & -20 \end{bmatrix}; \quad B_F = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \end{bmatrix}; \quad C_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При этом матрица перехода

$$\Phi_F(t - \tau) = \begin{bmatrix} e^{-10(t-\tau)}, & 0 \\ 0, & e^{-20(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

Вектор переменных состояния при $x(t)=1(t)$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-10t} \\ -1 + e^{-20t} \end{bmatrix}.$$

§ 8.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Применим метод описания систем РА в пространстве состояний для оценки качества их работы по интегральным оценкам. *Интегральной оценкой* называют значение следующего интеграла:

$$J_1 = \int_0^{\infty} C^T Z(t) dt = \int_0^{\infty} y(t) dt, \quad (8.31)$$

где $Z(t)$ — вектор переменных состояния, начальное значение которого известно; $y(t)$ — выходной сигнал системы.

Интегральные оценки определяются при входном сиг-

нале равному нулю. Смысл применения оценки (8.31) заключается в том, что интеграл находят без вычисления подынтегрального выражения. Чем меньше интеграл, тем выше качество работы системы РА и наоборот.

Интегральную оценку (8.31) называют *первой интегральной оценкой*. Для ее расчета необходимо в преобразовании Лапласа для $y(t)$ при заданном начальном состоянии положить $p=0$.

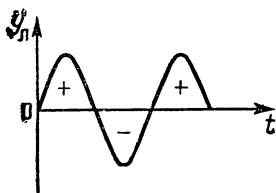


Рис. 8.4. К определению первой интегральной оценки

Первая интегральная оценка используется только в тех случаях, когда заранее известно, что переходный процесс в системе РА имеет монотонный характер. Часто по значению первой интегральной оценки нельзя судить о качестве работы системы. Действительно, если в системе РА имеют место незатухающие коле-

бания (рис. 8.4), то первая интегральная оценка окажется равной нулю, т. е. будет соответствовать высокому качеству работы, на самом деле такая система неработоспособна. Поэтому качество работы систем РА определяют с помощью *квадратичной интегральной оценки*:

$$J_2 = \int_0^{\infty} y^2(t) dt. \quad (8.32)$$

Очевидно, для системы с переходным процессом, показанным на рис. 8.4, квадратичная интегральная оценка равна бесконечности, т. е. соответствует неудовлетворительному качеству работы.

Для достижения требуемых показателей качества работы ряд параметров системы РА могут варьироваться относительно расчетных значений. К числу таких регулируемых параметров относится коэффициент усиления системы, постоянные времени корректирующих устройств и другие значения параметров, при которых интегральная оценка имеет минимальное значение, называют *оптимальными*. Оптимальные параметры находятся из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} J = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8.33)$$

где β_i — регулируемые параметры; k — число регулируемых параметров.

Иногда выбор параметров из условия минимума оценки (8.32) приводит к резко выраженным колебательным процессам, поэтому в системах РА применяется *обобщенная интегральная квадратичная оценка*:

$$J_V = \int_0^{\infty} v(t) dt, \quad (8.34)$$

где $v(t)$ — квадратичная форма.

Примером квадратичной формы является функция

$$v(t) = \alpha_1 z_1^2(t) + \alpha_2 z_2^2(t) + \dots + \alpha_n z_n^2(t), \quad (8.35)$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_n(t)$ — составляющие вектора состояния; α_i — весовые коэффициенты.

В простейшем случае интегральная оценка (8.34) имеет вид

$$J_{\tau} = \int_0^{\infty} [z_1^2(t) + \tau^2 z_2^2(t)] dt, \quad (8.36)$$

где τ — весовой коэффициент

Физический смысл интегральной оценки (8.36) следующий. При выборе параметров системы РА из условия минимума оценки (8.36) не допускается как длительное отклонение от нуля переменной (иначе первая составляющая оценки будет большой), так и большое значение $z_2(t)$ (иначе вторая составляющая оценки будет большой). Таким образом, получается хотя и быстрый, но и плавный переходный процесс. При этом, чем больше весовой коэффициент τ , тем более медленному переходному процессу соответствует минимум интегральной оценки (8.36). Оказывается, что выбор параметров системы РА из условия минимума оценки (8.36) означает приближение переходного процесса в системе к экспоненте с постоянной времени τ , а из условия минимума оценки (8.32) — приближение переходного процесса к ступенчатой функции.

Для вычисления квадратичных интегральных оценок выражение (8.35) необходимо записать в матричном виде (см. приложение П.4):

$$v(t) = \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{V} \mathbf{Z}(t), \quad (8.37)$$

где

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \alpha_1, & 0, & 0, \dots, & 0 \\ 0, & \alpha_2, & 0, \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, \dots, & \alpha_n \end{bmatrix}$$

— матрица квадратичной формы.

Расчет квадратичных интегральных оценок основан на введении дополнительной квадратичной формы, которая с квадратичной формой интегральной оценки (8.35) связана выражением

$$\frac{d}{dt} w(t) = -v(t). \quad (8.38)$$

При этом квадратичная интегральная оценка (8.34) принимает вид

$$J_v = - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} w(t) dt = w(0). \quad (8.39)$$

Если выразить дополнительную квадратичную форму через вектор переменных состояния

$$w(t) = Z^T(t) W Z(t), \quad (8.40)$$

то (8.39) окажется следующей:

$$J_v = Z^T(0) W Z(0), \quad (8.41)$$

где W — матрица дополнительной квадратичной формы; $Z(0)$ — начальное значение вектора переменных состояния.

Для определения матрицы дополнительной квадратичной формы подставим выражение (8.40) в (8.38). В результате найдем, что

$$\frac{d}{dt} w(t) = Z^T(t) W Z(t) + Z^T(t) W \dot{Z}(t) = -Z^T(t) V Z(t). \quad (8.42)$$

Учитывая векторное дифференциальное уравнение системы (8.8), в котором $x(t) = 0$, получим

$$Z^T(t) A^T W Z(t) + Z^T(t) W A Z(t) = -Z^T(t) V Z(t). \quad (8.43)$$

Из этого выражения следует матричное уравнение

$$A^T W + W A = -V. \quad (8.44)$$

К сожалению, из последнего уравнения нельзя в общем виде определить матрицу W . Поэтому поступают следующим образом. Выполняют операции умножения и сложения в левой части уравнения (8.44), после чего приравнивают элементы полученной матрицы к соответствующим элементам матрицы справа. Так как матрица W — симметричная матрица, то в результате получают си-

стему $0,5 n(n+1)$ алгебраических уравнений с неизвестными элементами матрицы \mathbf{W} . Квадратичная форма всегда больше нуля, поэтому из найденных решений для элементов матрицы \mathbf{W} необходимо отобрать только те, при которых матрица дополнительной квадратичной формы будет положительно определенной матрицей (см. приложение П.4).

Пример 8.2. Определить оптимальное значение коэффициента усиления из условия минимума интегральной оценки (8.36) для системы передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1+pT_1)(1+pT_2)},$$

где $T_1=0,1$ с; $T_2=0,05$ с.

Начальное состояние системы: $z_1(0)=1$; $z_2(0)=z_3(0)=0$.

Решение. Передаточная функция системы в замкнутом состоянии

$$W_3(p) = \frac{b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

где $a_0=b_0=K/(T_1 T_2)$; $a_2=1/T_1+1/T_2$; $a_1=1/(T_1 T_2)$.

Таким образом, матрицы системы и квадратичной оценки следующие:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу дополнительной квадратичной формы вычислим из уравнения (8.44), которое в рассматриваемой задаче при $\tau=1$ с имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решив систему алгебраических уравнений, получаемых из последнего выражения, найдем, что

$$\begin{aligned} B_{13} &= B_{31} = \frac{1}{2a_0}; & B_{12} &= B_{21} = \frac{a_2}{2a_0} + \frac{a_2 + a_0}{2(a_1 a_2 - a_0)}; \\ B_{23} &= B_{32} = \frac{a_2}{a_0} \frac{a_2 + a_0}{2(a_1 a_2 - a_0)}; & B_{11} &= \frac{a_1}{2a_0} + a_2 \frac{a_2 + a_0}{2(a_1 a_2 - a_0)}; \\ B_{22} &= \frac{a_1 + a_2^2}{a_0} \frac{a_2 + a_0}{2(a_1 a_2 - a_0)} - \frac{1}{2a_0}; & B_{33} &= \frac{a_2 + a_0}{2a_0(a_1 a_2 - a_0)}. \end{aligned}$$

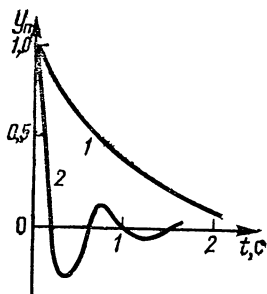


Рис. 8.5. Переходные процессы в системе, соответствующие минимуму интегральных оценок

На рис. 8.5 показаны кривые переходных процессов, рассчитанных при коэффициенте усиления, соответствующих минимуму интегральных оценок (8.36) (кривая 1) и (8.32) (кривая 2).

В соответствии с (8.41) интегральная оценка $J_\tau = B_{11}$.

Оптимальное значение коэффициента усиления определим из условия $\frac{\partial}{\partial K} J_\tau = 0$. В результате получим $K_{\text{opt}} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Рассчитаем коэффициент усиления в системе из условия минимума квадратичной интегральной оценки (8.32), которая в рассматриваемой задаче

$$J_2 = \frac{a_1}{2a_0} + \frac{a_2^2}{2(a_1 a_2 - a_0)}.$$

Оптимальное значение коэффициента усиления $K_{\text{opt}} = 9,6 \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, различным квадратичным интегральным оценкам соответствуют различные оптимальные значения коэффициентов усиления.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 8

1. Что такое переменные состояния? Поясните их физический смысл.
2. Поясните неоднозначность выбора переменных состояния.
3. Между какими сигналами устанавливает связь матрица наблюдения?
4. От каких параметров передаточной функции зависят элементы матриц системы и управления?
5. Поясните физический смысл матрицы перехода.
6. К каким системам РА при оценке качества их работы можно применять первую интегральную оценку?

ГЛАВА 9

СИНТЕЗ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

§ 9.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Первым этапом проектирования системы РА является выбор по заданным показателям качества работы системы и известным характеристикам сигнала и помехи ее структурной схемы или передаточной функции, обеспечи-

вающую в некотором смысле наилучшую (оптимальную) характеристику системы РА. Спроектированную таким образом систему РА называют *оптимальной*. Очевидно, что передаточная функция оптимальной системы зависит не только от характеристик сигнала и помехи, но и от выбранного критерия оптимальности (от выбранной оценки качества работы). При этом различным критериям оптимальности при одних и тех же характеристиках сигнала и помехи соответствуют различные передаточные функции оптимальных систем РА.

После определения оптимальной передаточной функции проектируемой системы начинается второй, не менее важный этап разработки, — реализация этой функции в виде технического устройства.

К современным системам РА предъявляют различные требования, которые помимо технических (точность работы, параметры переходного процесса и др.) включают требования по сложности, стоимости, надежности, условий эксплуатации систем РА. Учесть эти требования при выборе критерия оптимальности обычно не удается. Во многих случаях оптимальная передаточная функция системы РА, найденная по выбранному критерию оптимальности, не удовлетворяет ряду других не учтенных показателей качества работы системы РА. Поэтому приходится корректировать параметры передаточной функции с тем, чтобы удовлетворить требованиям, не учтенным в основном показателе качества работы системы. По этим причинам технические системы обычно не являются в строгом смысле оптимальными системами, их параметры несколько отличаются от оптимальных значений, т. е. спроектированная система РА является квазиоптимальной.

Таким образом, для синтеза системы РА необходимо:
определить статические характеристики сигналов и помех, действующих на проектируемую систему;

сформулировать назначение системы;

выбрать на основании заданных технических требований к качеству работы системы критерий оптимальности;
найти оптимальную передаточную функцию проектируемой системы РА;

уточнить способы включения корректирующих устройств и найти их передаточные функции;

разработать корректирующие устройства, присоединение которых к объекту управления позволяет получить систему РА с оптимальной передаточной функцией.

При синтезе большинства систем РА радиотехнических комплексов и систем радиоуправления достаточно для описания сигналов и помех ограничиться определением их математического ожидания и корреляционных функций или их спектральных плотностей.

Сформулировать назначение проектируемой системы РА, значит, установить, как выходной сигнал должен быть связан с входным. Это можно описать с помощью желаемого оператора преобразования входного сигнала, который определяет идеальный выходной сигнал проектируемой системы РА:

$$Y_{\text{ж}}(p) = W_{\text{ж}}(p) X(p), \quad (9.1)$$

где $W_{\text{ж}}(p)$ — желаемая передаточная функция преобразования сигнала.

Если желаемая передаточная функция равна единице, то задачу отыскания оптимальной передаточной функции называют *задачей оптимального сглаживания* или *фильтрации*.

Задачу отыскания оптимальной передаточной функции системы РА при

$$W_{\text{ж}}(p) = e^{pT} \quad (9.2)$$

называют *задачей оптимального статистического упреждения*, а при

$$W_{\text{ж}}(p) = p; \quad W_{\text{ж}}(p) = 1/p \quad (9.3)$$

— *задачей оптимального статистического дифференцирования и интегрирования*.

Выражениям (9.2) и (9.3) соответствуют передаточным функциям «идеальных систем», осуществляющих заданное преобразование сигналов без погрешностей. Очевидно, что из-за действия помех сигнал на выходе системы (рис. 9.1) $y(t)$ отличается

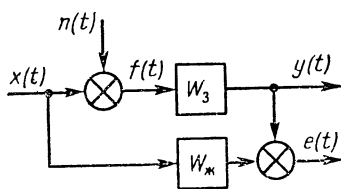


Рис. 9.1. К определению суммарной ошибки системы

от сигнала на выходе «идеальной системы» $y_{\text{ж}}(t)$. Для оценки приближения сигнала $y(t)$ к $y_{\text{ж}}(t)$ используются различные показатели. Наибольшее распространение нашел критерий среднеквадратической ошибки

$$\sigma_e^2(t) = \overline{e^2(t)}, \quad (9.4)$$

где $e(t) = y_{\text{ж}}(t) - y(t)$ — ошибка системы РА.

При синтезе систем РА оптимальной считается система, в которой среднеквадратическая ошибка (9.4) достигает минимального значения. Широкое применение критерия среднеквадратической ошибки объясняется тем, что оптимальная система, спроектированная из условия минимума этой ошибки, получается линейной. Кроме того, критерий (9.4) удобен с математической точки зрения. В дальнейшем при синтезе оптимальных систем РА будем использовать критерий среднеквадратической ошибки (9.4).

Найти оптимальную передаточную функцию системы не сложно. Трудности, возникающие при этом, можно преодолеть с помощью современных ЭВМ.

Проектирование оптимальных систем РА имеет смысл только в том случае, когда априорные сведения о статических характеристиках сигнала и помехи достоверны и есть уверенность в том, что в процессе работы они не изменятся. В реальных системах эти условия выполняются не всегда, поэтому в инженерной практике стремятся не к оптимальной структуре системы РА, а к более простой, параметры которой выбирают из условия минимума среднеквадратической ошибки.

В ряде случаев достаточно бывает обеспечить полосу пропускания проектируемой системы РА приблизительно равную полосе пропускания оптимальной системы, не добиваясь полного совпадения частотных характеристик оптимальной и реальной систем. Это позволяет обеспечить в проектируемой системе среднюю квадратическую ошибку, мало отличающуюся от ошибок в оптимальной системе, с одновременным удовлетворением остальных требований к системе РА. При таком подходе к проектированию оптимальная структурная схема системы РА используется как эталонная, позволяющая получить предельно достижимую среднюю квадратическую ошибку.

Ранее отмечалось, что важным этапом проектирования является техническая реализация системы РА по найденной оптимальной передаточной функции. Трудности этого этапа связаны с тем, что, во-первых, характеристики объекта управления проектируемой системы известны лишь приблизительно, во-вторых, для реализации оптимальной структурной схемы системы; как правило, недостаточно информации о входных и выходных сигналах (в ряде случаев требуется информация о производных этих сигналов) и, в-третьих, для технической реализации устройств такой системы может потребоваться разработка

сложных электронных приборов. Указанные особенности нужно учитывать во время проектирования систем РА при случайных воздействиях.

§ 9.2. СИНТЕЗ СИСТЕМ ПРИ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЕ

Задача синтеза системы РА при заданной структурной схеме заключается в том, что при известных характеристиках сигнала и помехи нужно определить оптимальные значения параметров системы, при которых суммарная средняя квадратическая ошибка минимальна. Так как структурная схема системы известна, то нетрудно найти выражение для суммарной средней квадратической ошибки как функцию параметров системы:

$$\sigma_e^2 = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad (9.5)$$

где β_i — параметры системы.

Для расчета оптимальных значений параметров нужно исследовать на минимум функцию (9.5). Для этого нужно решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \sigma_e^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.6)$$

Обычно минимум суммарной среднеквадратической ошибки при оптимальных значениях параметров следует из анализа физического содержания задачи, поэтому нет необходимости в вычислении второй производной. Если вторая производная положительна, то при найденных оптимальных параметрах имеет место минимум суммарной средней квадратической ошибки системы РА.

В процессе синтеза системы РА обычно требуется вычислить оптимальные значения только настраиваемых параметров (коэффициент усиления и одна или две постоянные времени корректирующего устройства) системы, число которых в системах невелико, что облегчает задачу оптимизации.

Пример 9.1. Найти оптимальное значение коэффициента усиления в системе РА, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1 + pT)}. \quad (9.7)$$

Решение. На систему действуют сигнал и помеха, спектральные плотности которых $S_x(\omega) = N_x/\omega^2$; $S_n(\omega) = N_n$. Суммарная сред-

ная квадратическая ошибка системы

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|W_e(j\omega) W_\Phi(j\omega)|^2 N_x + |W_s(j\omega)|^2 N_n] d\omega =$$

$$= N_x \frac{1+KT}{2K} + N_n \frac{K}{2},$$

где $W_e(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega T)}{(j\omega)^2 T + j\omega + K}$ — частотная характеристика ошибки системы; $W_\Phi(j\omega) = 1/(j\omega)$ — частотная характеристика формирующего фильтра сигнала; $W_s(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2 T + j\omega + K}$ — частотная характеристика замкнутой системы.

Оптимальное значение коэффициента усиления определим из условия (9.6), которое для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial K} \sigma_e^2 = -\frac{N_x}{2K^2} + \frac{N_n}{2} = 0.$$

Тогда оптимальный коэффициент усиления $K_{\text{opt}} = \sqrt{N_x/N_n}$.

На рис. 9.2 показаны кривые изменения составляющих средней квадратической ошибки системы РА в зависимости от коэффициента усиления для $N_x = 0,76 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $N_n = 0,305 \times 10^{-4}$ рад²·с; $T = 0,1$ с.

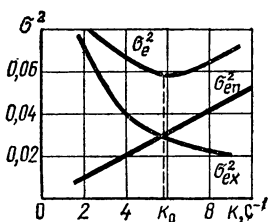


Рис. 9.2. К определению оптимального коэффициента усиления системы

§ 9.3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ

Рассмотрим систему РА с частотной характеристикой (рис. 9.3)

$$W(j\omega) = \begin{cases} e^{j\theta} & \text{при } \omega \leq \omega_n; \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_n, \end{cases} \quad (9.8)$$

где ω_n — ширина полосы пропускания системы РА.

Если сигнал и помеха некоррелированы, то дисперсия ошибки системы с частотной характеристикой (9.8) в соответствии с выражением (6.20)

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_n}^{\infty} S_x(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_n} S_n(\omega) d\omega = \sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2, \quad (9.9)$$

где σ_e — средняя квадратическая ошибка; $S_x(\omega)$ — спектральная плотность сигнала; $S_n(\omega)$ — спектральная плот-

ность помехи; σ_{ex} — средняя квадратическая ошибка относительно сигнала; σ_{en} — средняя квадратическая ошибка из-за действия помехи.

Из выражения (9.9) следует, что средняя квадратическая ошибка системы РА зависит от ширины полосы

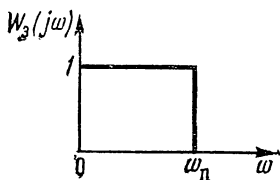


Рис. 9.3. Идеальная ЛЧХ

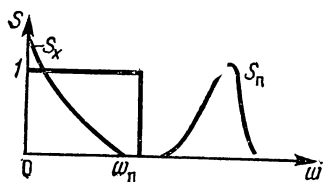


Рис. 9.4. К определению оптимальной полосы пропускания при неперекрывающихся спектрах сигнала и помехи

пропускания. Полосу пропускания системы РА, при которой средняя квадратическая ошибка принимает минимальное значение, называют *оптимальной*.

На рис. 9.4 показаны графики спектральных плотностей сигнала и помехи. Так как эти графики не перекрываются, то оптимальная полоса пропускания системы равна граничной частоте спектра сигнала. В этом случае средняя квадратическая ошибка системы РА равна нулю, так как все составляющие спектра сигнала воспроизводятся системой и ни одна составляющая спектра помехи не проходит на ее выход.

Если графики спектральных плотностей сигнала и помехи перекрываются, то обе составляющие средней квадратической ошибки системы в выражении (9.9) не равны нулю. Из рис. 9.5 видно, что первая составляющая (средняя квадратическая ошибка воспроизведения сигнала) определяется той частью спектральной плотности сигнала, которая расположена за полосой пропускания системы (площадь 1 под графиком спектральной плотности сигнала). С расширением полосы пропускания эта составляющая ошибки уменьшается (рис. 9.6). Вторая составляющая средней квадратической ошибки системы, обусловленная помехой, зависит от той части спектральной плотности помехи, которая совпадает с полосой пропускания системы (площадь 2 на рис. 9.5). С расшире-

нием полосы пропускания среднеквадратическая ошибка из-за действия помехи увеличивается (рис. 9.6). Оптимальная полоса пропускания системы РА соответствует минимальной среднеквадратической ошибке. Для ее вы-

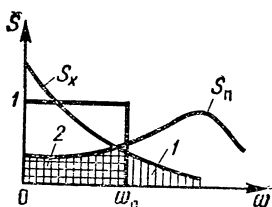


Рис. 9.5. К пояснению оптимальной полосы пропускания системы РА

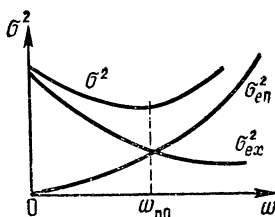


Рис. 9.6. Зависимость средней квадратической ошибки системы РА от ω_n

числения продифференцируем выражение (9.9) по полосе пропускания ω_n и полученный результат приравняем нулю. В результате получим

$$-\frac{1}{\pi} S_x(\omega_{п0}) + \frac{1}{\pi} S_n(\omega_{п0}) = 0. \quad (9.10)$$

Из этого выражения следует, что оптимальная полоса пропускания системы — это частота, на которой выполняется равенство

$$S_x(\omega_{п0}) = S_n(\omega_{п0}). \quad (9.11)$$

Так как частотные характеристики систем РА отличаются от идеальной характеристики (9.8), то оптимальная полоса пропускания, найденная из выражения (9.11), получается приближенной. Как показывает практика, ошибки при этом не превышают 10—20 %.

Минимум суммарной средней квадратической ошибки системы определяется не только полосой пропускания, но и видом ее частотной характеристики. Поэтому в общем случае синтез системы заключается в нахождении ее оптимальных частотных характеристик из условия минимума суммарных средних квадратических ошибок при заданных статистических характеристиках сигнала и помехи.

§ 9.4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Сформулируем постановку задачи синтеза оптимальных систем. На вход проектируемой системы действуют

стационарные сигнал и помеха, автокорреляционные функции которых известны. Математические ожидания сигнала и помехи равны нулю. Желаемый выходной сигнал синтезируемой системы определяется заданной частотной характеристикой. Необходимо найти передаточную функцию системы, при которой суммарная средняя квадратическая ошибка системы (см. рис. 9.1) минимальна:

$$\sigma_e = \sqrt{\overline{e^2(t)}} = \min, \quad (9.12)$$

где $e(t) = y_{\text{ж}}(t) - y(t)$ — ошибка системы; $y_{\text{ж}}(t)$ — желаемый выходной сигнал системы; $y(t)$ — выходной сигнал системы.

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации. В этом случае

$$\begin{aligned} W_{\text{ж}}(j\omega) &= 1, \text{ т. е.} \\ y_{\text{ж}}(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Согласно (9.12), дисперсия ошибки

$$\sigma^2 = \overline{[x(t) - y(t)]^2} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}^2. \quad (9.14)$$

Дисперсию выходного сигнала синтезируемой системы РА σ_y^2 найдем аналогично дисперсии ошибки системы (6.18):

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda, \quad (9.15)$$

где $w(t)$ — импульсная переходная функция системы; $R_f(\tau)$ — автокорреляционная функция суммарного входного сигнала $f(t) = x(t) + n(t)$; $n(t)$ — помеха.

Таким же образом получим

$$\sigma_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_{xf}(\lambda) d\lambda, \quad (9.16)$$

где $R_{xf}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция сигнала с суммарным воздействием.

Подставив выражения (9.15) и (9.16) в (9.14), определим

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \sigma_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda - \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_{xf}(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Синтез оптимальной системы сводится к нахождению импульсной переходной функции из (9.17). Для решения этой задачи дадим вариацию импульсной переходной функции

$$\omega(t) = \omega_0(t) + \delta\omega(t), \quad (9.18)$$

где $\omega_0(t)$ — искомая оптимальная импульсная переходная функция проектируемой системы РА; δ — вариация импульсной переходной функции.

Импульсную переходную функцию, минимизирующую дисперсию ошибки (9.17), определим из условия

$$\frac{R}{\partial \delta} \sigma^2 \Big|_{\delta=0} = 0. \quad (9.19)$$

Подставим формулу (9.18) в (9.17). Тогда оптимальная импульсная переходная функция проектируемой системы РА с учетом (9.19) должна удовлетворять уравнению

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta - R_{xf}(\lambda) \right] d\lambda = 0. \quad (9.20)$$

Так как неоптимальная импульсная переходная функция $\omega(t)$ — функция произвольная, то уравнение (9.20) выполняется только в том случае, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) R_f(t - \eta) d\eta - R_{xf}(t) = 0, \quad (9.21)$$

где переменная λ заменена на t .

Выражение (9.21) называют *уравнением Винера — Хопфа*.

Средняя квадратическая ошибка выделения сигнала из воздействия в установившемся режиме — постоянная величина, ее значение определяется из выражения (9.17), в котором вместо $\omega(t)$ нужно подставить $\omega_0(t)$. Тогда с учетом уравнения (9.21)

$$\sigma_{\text{емин}}^2 = \sigma_x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda. \quad (9.22)$$

Решение уравнения Винера — Хопфа во временной области является сложной задачей. Значительно проще решить эту задачу в частотной области, т. е. найти оптимальную частотную характеристику системы. С этой целью применим к уравнению (9.21) преобразование

Фурье. В результате получим

$$W_0(j\omega) S_f(\omega) = S_{xf}(\omega). \quad (9.23)$$

Из этого уравнения найдем оптимальную частотную характеристику:

$$W_0(j\omega) = \frac{S_{xf}(\omega)}{S_f(\omega)} = \frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(j\omega) \psi(-j\omega)}, \quad (9.24)$$

где $S_f(\omega)$ — спектральная плотность суммарного сигнала на входе проектируемой системы; $S_{xf}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность сигнала с суммарным сигналом; $\psi(j\omega)$ — функция, все полюсы которой на плоскости комплексного переменного $p=j\omega$ расположены в левой полуплоскости; $\psi(-j\omega)$ — функция, все полюсы которой расположены в правой полуплоскости.

В общем случае

$$\begin{aligned} S_{xf}(\omega) &= S_x(\omega) + S_{xp}(\omega); \\ S_f(\omega) &= S_x(\omega) + S_{xp}(\omega) + S_p(\omega) + S_{px}(\omega). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Если сигнал и помеха некоррелированы, то

$$\begin{aligned} S_{xf}(\omega) &= S_x(\omega); \\ S_f(\omega) &= S_x(\omega) + S_p(\omega). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Из выражений (9.24) — (9.26) следует, что оптимальная частотная характеристика выделяет составляющие сигнала на частотах, на которых его спектральная плотность сравнительно велика, и ослабляет составляющие сигналы на частотах с максимальной спектральной плотностью помехи.

С учетом оптимальной частотной характеристики минимальное значение дисперсии ошибки для некоррелированных сигнала и помехи в соответствии с выражением (6.20)

$$\sigma_{\text{емин}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega) S_p(\omega)}{S_x(\omega) + S_p(\omega)} d\omega. \quad (9.27)$$

Таким образом, если спектры сигнала и помехи не перекрываются, то средняя квадратическая ошибка может быть равна нулю.

Спектральная плотность является четной функцией относительно частоты ω , поэтому полюсы характеристики (9.24) расположены на плоскости $p=j\omega$ как слева, так и справа от мнимой оси. Поэтому найденная оптимальная частотная характеристика (9.24) соответствует физи-

чески нереализуемой неустойчивой системе. Дальнейший синтез оптимальной системы сводится к определению реализуемой оптимальной частотной характеристики, наиболее близкой к полученной нереализуемой (9.24).

Реализуемая оптимальная частотная характеристика определяется выражением

$$W_0(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \right]^+, \quad (9.28)$$

где операция $[...]^+$ означает выделение слагаемых, полюсы которых на плоскости комплексного переменного $p=j\omega$ расположены слева от мнимой оси.

В случае, часто встречающемся в инженерной практике, когда функция

$$\frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \quad (9.29)$$

является дробно-рациональной функцией относительно частоты, выделение слагаемых с полюсами, расположенными слева от мнимой оси, осуществляется путем разложения (9.29) на простые дроби:

$$\frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\omega - \omega_i}. \quad (9.30)$$

где

$$\alpha_i = \left(\omega - \frac{1}{\lambda_i} \right) \frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)}; \quad (9.31)$$

λ_i — полюсы выражения (9.29).

Дисперсия ошибки в системе с частотной характеристикой (9.28) будет больше значения, определяемого по выражению (9.27) и найденного без учета физической реализуемости оптимальной системы. Однако среди реализуемых устройств система РА с характеристикой (9.28) обеспечивает наименьшее значение среднеквадратической ошибки выделения сигнала из его смеси с помехой.

Согласно (9.28), передаточная функция оптимальной проектируемой системы

$$W_0(p) = W_0(j\omega) |_{j\omega=p}. \quad (9.32)$$

Тогда передаточная функция последовательного корректирующего устройства, включаемого в цепь сигнала ошибки,

$$W_K(p) = W_{po}(p)/W_{pi}(p), \quad (9.33)$$

где $W_{po}(p)$ — передаточная функция разомкнутой оптимальной системы; $W_{pi}(p)$ — передаточная функция исход-

ной части, составленная из функционально необходимых устройств системы.

Если для коррекции используется стабилизирующая обратная связь, то передаточную функцию цепи обратной связи можно вычислить по формуле (7.24) с учетом (9.33).

Пример 9.2. Найти передаточную функцию последовательного корректирующего устройства в оптимальной системе автоподстройки частоты, структурная схема которой показана на рис. 1.6, для случая, когда спектральные плотности сигнала и помехи определяются выражениями

$$S_x(\omega) = \frac{N_x}{1 + \omega^2 T_x^2}, \quad S_n(\omega) = N_n. \quad (9.34)$$

Решение. Инерционностью усилителя и дискриминатора системы пренебрегаем. Тогда передаточная функция исходной части системы автоподстройки частоты

$$W_{\text{ри}}(p) = \frac{K_{\text{ри}}}{1 + pT_r}, \quad (9.35)$$

где T_r — постоянная времени гетеродина; $K_{\text{ри}} = K_d K_y K_r$.

Спектральная плотность смеси сигнала с помехой

$$S_f(\omega) = S_x(\omega) + S_n(\omega) = B \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_x} \frac{1 - j\omega T_0}{1 - j\omega T_x}, \quad (9.36)$$

$$\text{де } B = N_x + N_n; \quad T_0^2 = T_x^2 \frac{N_x}{N_x + N_n}.$$

Таким образом,

$$\psi(j\omega) = \sqrt{B} \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_x}; \quad \psi(-j\omega) = \sqrt{B} \frac{1 - j\omega T_0}{1 - j\omega T_x}. \quad (9.37)$$

В соответствии с выражением (9.28)

$$\begin{aligned} W_0(j\omega) &= \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{\alpha_1}{1 + j\omega T_x} + \frac{\alpha_2}{1 - j\omega T_0} \right] + \frac{N_x}{\sqrt{B}} = \\ &= \frac{1}{\psi(j\omega)} \frac{\alpha_1}{1 + j\omega T_x} \frac{N_x}{\sqrt{B}}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

По методу неопределенных коэффициентов

$$\alpha_1 = T_x / (T_x + T_0). \quad (9.39)$$

В соответствии с (9.38) и (9.39) оптимальная частотная характеристика проектируемой системы автоподстройки частоты

$$W_0(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j\omega T_0}, \quad (9.40)$$

$$\text{где } K_0 = \alpha_1 \frac{N_x}{B}.$$

Для наглядности выразим параметры оптимальной частотной характеристики через коэффициент, равный отношению уровней спектральной плотности сигнала и помехи. В результате получим

$$K_0 = 1 - 1/\sqrt{1 + \rho}, \quad T_0 = T/\sqrt{1 + \rho}, \quad (9.41)$$

где $\rho = N_x/N_{\Pi}$.

На рис. 9.7 показаны зависимости коэффициента усиления K_0 и постоянной времени T_0 от коэффициента ρ , из которых видно, что с увеличением ρ постоянная времени оптимальной системы уменьшается (ее предельное значение равно нулю), а коэффициент усиления растет (его предельное значение равно единице). Таким образом, при отсутствии помехи оптимальная система является безынерционным звеном (дисперсия ошибки равна нулю).

Дисперсию суммарной ошибки в оптимальной системе автоподстройки частоты определим по формуле (6.20):

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|1 - W_0(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_0(j\omega)|^2 S_{\Pi}(\omega)] d\omega = \\ &= \frac{T_0 - (1 - K_0)^2 T_x}{2T_x(T_0 + T_x)} N_x + \frac{K_0^2}{2T_0} N_{\Pi}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание введенное обозначение ρ ,

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{N_x}{2T_x \sqrt{1 + \rho}} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\rho}{(\sqrt{1 + \rho} + 1)^2} \right]. \quad (9.42) \end{aligned}$$

Вычислим дисперсию ошибки по формуле (9.27):

$$\sigma_{e\min}^2 = \frac{N_x}{2T_x \sqrt{1 + \rho}}.$$

Полученное значение меньше дисперсии ошибки, рассчитанной по оптимальной частотной характеристике. Это объясняется тем, что формула (9.27) найдена без учета физической реализуемости системы.

Передающая функция разомкнутой оптимальной системы автоподстройки частоты

$$W_{p0}(p) = \frac{K_{p0}}{1 + pT},$$

где $K_{p0} = K_0/(1 - K_0)$; $T = T_0/(1 - K_0)$.

Передающая функция последовательности корректирующего устройства в соответствии с выражением (9.33)

$$W_K(p) = k_K \frac{1 + pT_K}{1 + pT},$$

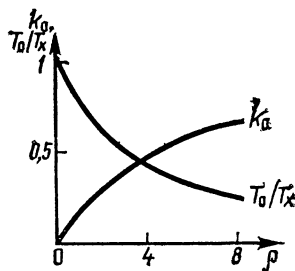


Рис. 9.7. Зависимость оптимальных параметров системы от отношения сигнал/шум

где $k_n = K_{po}/K_{pi}$ — коэффициент передачи корректирующего устройства.

Корректирующее устройство в оптимальной системе автоподстройки частоты включают между усилителем и дискриминатором, оно может быть реализовано RC -цепью с отставанием по фазе.

В заключение отметим, что при нестационарных воздействиях оптимальная система оказывается нестационарной, определение оптимальной переходной функции которой является сложной задачей. Поэтому при проектировании нестационарных оптимальных систем метод Винера не применяется. Решение нестационарных задач проектирования систем РА базируется на оптимальных фильтрах Калмана (см. гл. 11).

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 9

1. Поясните постановку задачи синтеза оптимальных систем РА.
2. Поясните физический смысл оптимальной полосы пропускания системы РА.
3. Каким образом вычисляются значения оптимальных параметров систем РА из условия минимума средней квадратической ошибки?
4. Поясните постановку задачи оптимальной фильтрации Винера и условие физической реализуемости оптимального решения.

ГЛАВА 10

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 10.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ

Возрастание требований к качеству работы систем РА, увеличение объема перерабатываемой информации, усложнение объектов управления привело к тому, что средствами аналоговой техники и непрерывной автоматики нельзя решить многие практические задачи. В результате в современных радиотехнических устройствах и системах радиоуправления стали широко использовать цифровые системы РА, в состав которых входят ЦВМ или специализированные цифровые устройства. Быстрое внедрение в технику цифровых систем объясняется тем, что они по сравнению с аналоговыми имеют значительно большие вычислительные возможности. В цифровых системах, выполненных на базе микроэлектроники (инте-

гральных схемах, микропроцессорах и мини-ЭВМ), при небольших массах и габаритах можно использовать более сложные алгоритмы обработки сигналов. При этом точность реализации алгоритмов определяется только периодом дискретизации, числом разрядов цифровых кодов и может быть сделана весьма высокой.

Важным преимуществом цифровых систем является высокая стабильность их работы, в таких системах РА отсутствует дрейф нуля дискриминаторов и других цифровых устройств систем. Кроме того, в цифровых системах просто осуществляется перестройка их структуры и регулировка параметров.

В радиотехнических устройствах и системах радиоуправления цифровые системы применяются для стабилизации частоты, измерения дальности, управления антеннами РЛС, для формирования команд управления различными объектами. Для обработки сигналов в РЛС широкое применение нашли цифровые фильтры, реализуемые на устройствах цифровой техники: сумматорах, регистрах и т.п. Подобные фильтры используются и в качестве корректирующих устройств в различных системах РА. Цифровые фильтры позволяют избавиться от применения ЦВМ, что упрощает и снижает стоимость систем РА.

На рис. 10.1 показана типовая структурная схема цифровой системы РА, которая состоит из преобразова-

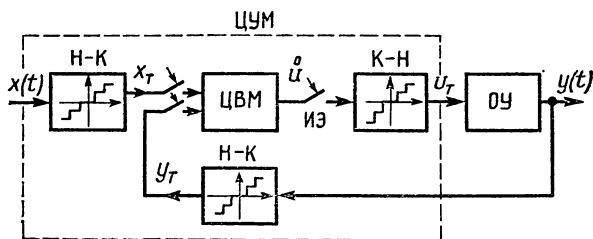


Рис. 10.1. Типовая структурная схема цифровой системы РА

телей информации непрерывных сигналов в код (НК), цифровой вычислительной машины (ЦВМ), обратного преобразователя (КН), осуществляющего преобразование кода в непрерывный сигнал, и непрерывного объекта управления (ОУ).

В процессе преобразования непрерывных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ в цифровые $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ происходит *дискретизация* этих сигналов, т. е. осуществляется выборка непрерывных сигналов, соответствующих дискретным моментам времени (обычно выборка производится через равные промежутки времени T). Дискретность ввода сигналов обеспечивается импульсным элементом (ИЭ). В процессе преобразования сигналов в цифровую форму происходит также их *квантование по уровню*. В результате из всех возможных дискретных сигналов выбираются только разрешенные уровни, кратные шагу квантования, равного значению младшего разряда ЦВМ. Если преобразователь НК имеет α разрядов, то число уровней квантования, отличных от нуля, составляет $2^\alpha - 1$.

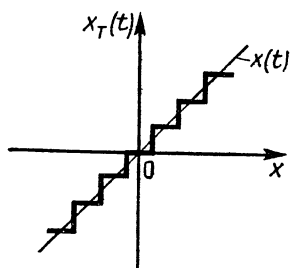


Рис. 10.2. К пояснению процесса квантования сигнала по уровню

От преобразователей НК сигналы поступают на ЦВМ, в которой реализован алгоритм управления системы. Для преобразования этого сигнала в непрерывный введен преобразователь КН, на выходе которого получают сигнал $u_T(t)$, под действием которого регулируется режим работы объекта управления системы РА.

Квантование сигналов по уровню — это нелинейная операция, поэтому цифровые системы относятся к классу нелинейных. Сигнал, квантованный по уровню, можно представить в виде (рис. 10.2)

$$x_T(t) = x(t) + \Delta_x(t), \quad (10.1)$$

где $x(t)$ — неквантованный сигнал; $\Delta_x(t)$ — шум квантования.

Число разрядов преобразователей информации обычно выбирается равным 8—15, при этом число уровней квантования сигналов велико, что позволяет во многих случаях пренебречь нелинейностью характеристик. При необходимости влияние шума квантования на качество работы системы РА можно учесть путем введения дополнительного сигнала $\Delta_x(t)$.

Цифровые системы из-за дискретизации в них сигналов по времени относятся к дискретным. Дискретизация

сигналов — линейная операция, поэтому, пренебрегая шумом квантования, цифровую систему можно рассматривать как линейную дискретную систему, методы анализа и синтеза которых рассматриваются в данной главе.

Входные и выходные сигналы цифровой части системы являются числовыми последовательностями, однако при анализе можно отвлечься от физических принципов работы цифровых устройств и считать основной характеристикой ЦВМ алгоритм, в соответствии с которым входные сигналы перерабатываются в выходные, не принимая во внимание форму представления сигналов. Тогда ЦВМ в системе РА можно представить как последовательное соединение цифрового фильтра, осуществляющего преобразование сигналов, и звена запаздывания с передаточной функцией e^{-pT} (рис. 10.3). Звено запаздывания учи-

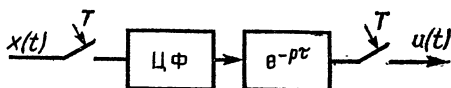


Рис. 10.3. Структурная схема ЦВМ

тывает время прохождения сигнала через цифровой фильтр. Время запаздывания зависит от решаемого алгоритма и быстродействия ЦВМ, в общем случае оно не равно периоду выдачи данных с ЦВМ. Очевидно, что эти величины связаны соотношением $0 < \tau \leq T$. Знак равенства имеет место в том случае, когда ЦВМ обслуживает один канал.

Система, структурная схема которой показана на рис. 10.1, состоит из цифровой

части и непрерывного объекта управления, такую систему называют *аналого-цифровой*. В радиотехнических устройствах применяются также системы РА, все части которых являются цифровыми. На рис. 10.4 показана структурная схема цифровой системы автоподстройки частоты (ЦФАПЧ). На вход цифрового фазового детектора (ЦФД) системы поступает периодический сигнал, форма которого с помощью формирующего устройства

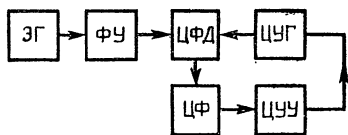


Рис. 10.4. Функциональная схема цифровой системы ФАПЧ

(ФУ) преобразуется к виду, необходимому для работы ЦФД. В последнем вырабатывается кодовая последовательность, соответствующая разности фаз сигналов с эталонного (ЭГ) и цифрового управляемого (УУГ) генераторов. Сигнал с ЦФД обрабатывается по определенному алгоритму в цифровом фильтре (ЦФ), после чего подается на цифровое устройство управления (ЦУУ), сигнал которого определяет частоту последовательности импульсов с ЦГ. Из рис. 10.4 видно, что система ФАПЧ — замкнутая система, входным сигналом которой является сигнал с ЭГ, а выходным — сигнал с ЦГ. Задача системы состоит в поддержании частоты ЦГ равной с заданной точностью частоте сигнала с ЭГ.

§ 10.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА В ДИСКРЕТНЫЙ

Для математического описания преобразования непрерывного сигнала $x(t)$ в дискретный удобна следующая математическая модель сигнала:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right). \quad (10.2)$$

Использование в (10.2) дельта-функции безразмерного аргумента связано с тем, что размерность сигнала $x^*(t)$ должна совпадать с размерностью $x(t)$. Согласно правилу изменения масштаба аргумента дельта-функции $\delta(t/T) = T\delta(t)$ из (10.2) найдем

$$x^*(t) = x(t) T \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (10.3)$$

Выражения (10.2) и (10.3) отличаются множителем T , который нужно учитывать при предельных переходах (при $T=0$). Во всех остальных случаях этот множитель можно опускать и модель сигнала принимать в виде

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (10.4)$$

Сигнал $x^*(t)$ называют *мгновенными импульсами* или *обобщенным дискретным сигналом*. Этот сигнал представляет собой последовательность δ -функций, площади

которых равны значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени $t=0, T, 2T, \dots$. Преобразование непрерывного сигнала в последовательность мгновенных импульсов (10.4) можно рассматривать как модуляцию последовательности единичных импульсов непрерыв-

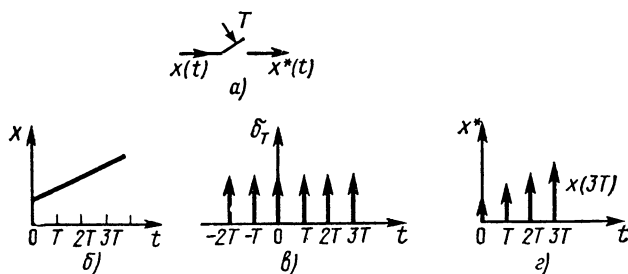


Рис. 10.5. К пояснению процесса квантования сигнала по времени:

а — схема дискретизатора; б—в — к пояснению математической модели

ным сигналом (рис. 10.5). На структурных схемах цифровых систем РА процесс преобразования сигнала $x(t) \rightarrow x^*(t)$ отображается введением ключа, который называют *дискретизатором* или *простейшим импульсным элементом*.

Последовательность мгновенных импульсов (10.4) подается на цифровое устройство системы, в котором перерабатывается в соответствии с алгоритмом в выходную последовательность мгновенных импульсов $u^*(t)$. В системах РА с непрерывными объектами управления последовательность $u^*(t)$ преобразуется в непрерывный сигнал. Для этой цели применяются преобразователи, сигнал на выходе которых между дискретными моментами времени остается постоянным. В этом случае каждый мгновенный импульс последовательности $u^*(t)$ преобразуется в прямоугольный импульс длительностью T , амплитуда которого равна площади мгновенного импульса. Например, мгновенный импульс в момент времени $t=0$ преобразуется в прямоугольный (рис. 10.6)

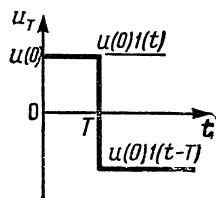


Рис. 10.6. К определению передаточной функции экстраполятора

вида $u_T(t) = u(0) [1(t) - 1(t-T)]$, откуда передаточная функция преобразования

$$W_0(p) = \frac{L[u_T(t)]}{L[u(0)\delta(t)]} = \frac{1 - e^{-pT}}{p}, \quad (10.5)$$

где $L[u(0)\delta(t)] = u(0)$ — преобразование Лапласа для мгновенного импульса в момент времени $t=0$.

Устройство, которому соответствует передаточная функция (10.5), называют *формирующим элементом* или *эстраполятором нулевого порядка*.

Представление цифровой части системы РА в виде дискретизатора, цифрового фильтра и формирующего элемента позволяет использовать для анализа и синтеза цифровых систем математический аппарат дискретных систем, который к настоящему времени разработан достаточно полно.

§ 10.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

На математическом аппарате Z-преобразования строится современная теория дискретных и цифровых систем РА. С целью определения Z-преобразования найдем преобразование Лапласа последовательности мгновенных импульсов (10.4). В результате получим

$$X(p) = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (10.6)$$

Функцию $x(nT)$ называют *дискретной*.

Введем обозначение $e^{pT} = z$. Тогда выражение (10.6) принимает вид

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = Z[x(t)]. \quad (10.7)$$

Функцию $X(z)$ называют Z-преобразованием сигнала $x(t)$.

Пример 10.1. Определить Z-преобразование сигнала $x(t) = 1(t)$.
Решение. В соответствии с (10.7)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1z^{-n} = \frac{z}{z-1}.$$

В этом выражении применена формула геометрической прогрессии. В приложении П.3 приведены Z-преобразования сигналов, наи-

более часто используемых в системах РА. Более полная таблица приведена в [5].

Свойства Z -преобразования описаны в [5], поэтому ограничимся указанием некоторых из них, которые требуются для дальнейшего изложения.

1. *Свойство линейности.* Если $X_1(z) = Z[x_1(t)]$ и $X_2(z) = Z[x_2(t)]$, то

$$Z[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(z) + bX_2(z). \quad (10.8)$$

2. *Первая теорема сдвига.* Если $X(z) = Z[x(t)]$, то для целых k

$$Z[x(t - kT)] = z^{-k} X(z). \quad (10.9)$$

3. *Вторая теорема сдвига.* Если $X(z) = Z[x(t)]$, то для целых k

$$Z[x(t + kT)] = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(nT) z^{-n} \right]. \quad (10.10)$$

4. *Свертка функций.* Если $Y(z) = X_1(z) X_2(z)$, то

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n x_1(nT - mT) x_2(mT). \quad (10.11)$$

5. *Предельные значения.* Если дискретные значения функции в установившемся режиме существуют, то они могут быть найдены путем следующего предельного перехода:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z). \quad (10.12)$$

Начальное значение сигнала вычисляют по формуле

$$\lim_{n \rightarrow 0} x(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (10.13)$$

6. *Формула обращения.* Дискретные значения функции по ее Z -преобразованию определяют следующим контурным интегралом:

$$x(nT) = \frac{1}{j2\pi T} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz. \quad (10.14)$$

Ранее определили Z -преобразование для случая, когда возникновение сигнала совпадает с моментом очередной посылки единичных импульсов несущей. Если сигнал запаздывает на ΔT , то последовательность мгновенных импульсов имеет вид

$$x^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x(t - \Delta T) \delta(t - nT). \quad (10.15)$$

При этом Z -преобразование вычисляется по формуле

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT - \Delta T) z^{-n}. \quad (10.16)$$

Выражение (10.16) характеризует Z -преобразование запаздывающих сигналов или модифицированное Z -преобразование. В приложении П.3 приведены модифицированные Z -преобразования для наиболее часто встречающихся сигналов; более полные таблицы приведены в [5].

Непосредственно из выражений (10.7) и (10.16) следует, что Z -преобразование несмещенного сигнала определяется через Z -преобразование запаздывающего сигнала с помощью следующего предельного перехода:

$$X(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 1} zX(z, \Delta T). \quad (10.17)$$

Помимо рассмотренного математического аппарата Z -преобразования для исследования цифровых систем РА применяется аппарат дискретного преобразования Лапласа, который подробно рассмотрен в [20].

§ 10.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Первоначально найдем передаточную функцию системы, структурная схема которой показана на рис. 10.7.

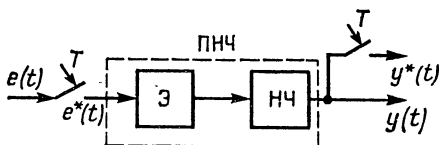


Рис. 10.7. Структурная схема импульсного фильтра

Подобные системы называют *импульсными фильтрами*. Импульсный фильтр состоит из объекта управления, непрерывной части, формирующего элемента и дискретизатора. Непрерывная часть и формирующий элемент образуют приведенную непрерывную часть импульсного фильтра, на вход которой подаются мгновенные импульсы. Выходной сигнал импульсного фильтра равен сумме реакций приведенной непрерывной части от каждого

мгновенного импульса:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) w(t - mT). \quad (10.18)$$

Следует иметь в виду, что сигнал на выходе импульсного фильтра является непрерывным и не равным нулю между дискретными моментами времени.

Введем последовательность мгновенных импульсов выходного сигнала. С этой целью условно подключим к выходу фильтра фиктивный дискретизатор, работающий синхронно с основным дискретизатором импульсного фильтра. На выходе фиктивного дискретизатора с учетом выражения (10.18) получим

$$y^*(t) = y(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) \sum_{n=0}^{\infty} w(t - mT) \delta(t - nT). \quad (10.19)$$

Применив к (10.19) преобразование Лапласа и учтя введенное обозначение $e^{pT} = z$, найдем

$$Y(z) = E(z) W(z), \quad (10.20)$$

где $E(z) = z[e(mT)]$; $W(z) = Z[w(nT)]$.

Выражение (10.20) можно записать в виде

$$W(z) = Y(z)/X(z), \quad (10.21)$$

из которого следует, что дискретную передаточную функцию импульсного фильтра $W(z)$ можно определить как отношение Z -преобразования выходного сигнала к Z -преобразованию входного сигнала на нулевых начальных условиях.

В цифровых системах РА передаточная функция формирующего элемента определяется выражением (10.5), поэтому передаточная функция приведенной непрерывной части импульсного фильтра имеет вид

$$W(p) = W_o(p) W_n(p) = (1 - e^{-pT}) \frac{W_n(p)}{p}, \quad (10.22)$$

где $W_n(p)$ — передаточная функция непрерывной части фильтра.

Выражению (10.22) соответствует импульсная передаточная функция

$$w(t) = h(t) - h(t - T), \quad (10.23)$$

где $h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_n(p)}{p} \right]$ — переходная функция непрерывной части фильтра.

Если через $H(z)$ обозначить Z -преобразование для переходной функции непрерывной части фильтра, то с учетом (10.9) и (10.23) дискретная передаточная функция импульсного фильтра

$$W(z) = \frac{z-1}{z} H(z). \quad (10.24)$$

Дискретная передаточная функция характеризует процессы, происходящие в импульсном фильтре, только в дискретные моменты времени.

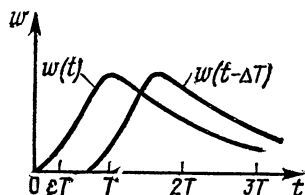


Рис. 10.8. Смещенная импульсная переходная функция ПНЧ

Для анализа характеристик между этими моментами времени используется смещенная дискретная передаточная функция, которая равна Z -преобразованию смещенной импульсной переходной функции приведенной непрерывной части фильтра. Если смещение обозначить через Δt или в относительных единицах через $\varepsilon = \Delta t/T$, то (рис. 10.8) значения

$w(t)$ в моменты времени $t = nT + \varepsilon T$ будут равны дискретным значениям смещенной импульсной переходной функции $w(t - \Delta T)$ в несмещенные моменты времени при времени запаздывания, равном $\Delta = 1 - \varepsilon$ (рис. 10.8). Для образования смещенной импульсной переходной функции необходимо в цепь фиктивного дискретизатора включить звено запаздывания с передаточной функцией $e^{-j\Delta T}$. Тогда смещенная дискретная передаточная функция импульсного фильтра

$$W(z, \varepsilon T) = Z[w(t - \Delta T)]_{\Delta=1-\varepsilon}, \quad (10.25)$$

где $w(t - \Delta T) = L^{-1}[W(p)e^{-p\Delta T}]$ — смещенная импульсная переходная функция приведенной непрерывной части фильтра.

Придавая ε значения от нуля до единицы, можно определить смещенные передаточные функции (10.25), которые позволят оценить процессы в импульсном фильтре для различных дискретных моментов времени.

Аналогично получению (10.24) найдем смещенную

дискретную передаточную функцию импульсного фильтра:

$$W(z, \varepsilon T) = \frac{z-1}{z} H(z, \Delta T) \Big|_{\Delta=1-\varepsilon}, \quad (10.26)$$

где $H(z, \Delta T)$ — Z -преобразование смещенной переходной функции непрерывной части импульсного фильтра, определяемое по таблицам модифицированного Z -преобразования (см. приложение П.3).

Пример 10.2. Найти передаточную функцию реверсивного счетчика без сброса, который накапливает поступающие на его вход положительные и отрицательные импульсы. Счетчик является цифровым интегратором и описывается разностным уравнением

$$u(nT) = u[(n-1)T] + x(nT), \quad (10.27)$$

где $u(nT)$, $x(nT)$ — дискретные значения выходного и входного сигналов.

Решение. Применим к уравнению (10.27) Z -преобразование. В результате с учетом теоремы (10.9) найдем, что

$$U(z) = z^{-1}U(z) + X(z). \quad (10.28)$$

В соответствии с (10.21) по (10.28) передаточная функция счетчика $W(z) = z/(z-1)$.

Пример 10.3. Определить дискретную передаточную функцию разомкнутого дальномера с одним интегратором, широко применяемого в РЛС.

Решение. В таком дальномере фильтр нижних частот — интегратор с передаточной функцией $W_{\text{и}}(p) = k/p$. Поэтому

$$W(p) = W_{\text{в}}(p) W_{\text{и}}(p) = k \frac{1 - e^{-pT}}{p^2}.$$

В соответствии с выражением (10.24) передаточная функция дальномера в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = \frac{z-1}{z} Z[h(t)] = \frac{kT}{z-1}, \quad (10.29)$$

где $h(t)$ — переходная функция непрерывной части, равной $k=tl(t)$, Z -преобразование которой определяется по таблице приложения П.3.

Если приведенная непрерывная часть импульсного фильтра состоит из параллельно включенных звеньев (рис. 10.9), то передаточные функции такого фильтра определяются выражениями

$$W(z) = \sum_{i=1}^{k_z} W_i(z); \quad (10.30)$$

$$W(z, \varepsilon T) = \sum_{i=1}^k W_i(z, \varepsilon T),$$

где k — число параллельно включенных звеньев.

При последовательном включении импульсных фильтров (рис. 10.10) дискретные передаточные функции получаются следующими:

$$W(z) = \prod_{i=1}^k W_i(z);$$

$$W(z) = \prod_{i=1}^{k-1} W_i(z) W_k(z, eT). \quad (10.31)$$

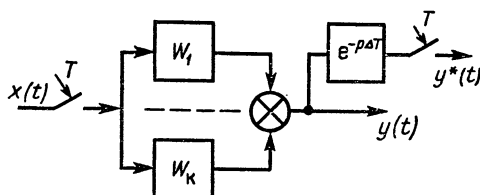


Рис. 10.9. Структурная схема с параллельно включенными звеньями

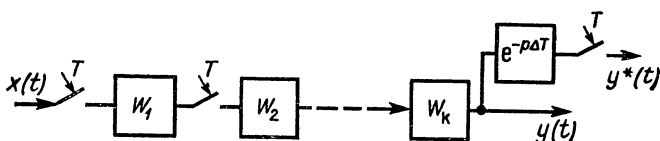


Рис. 10.10. Схема последовательно включенных импульсных фильтров

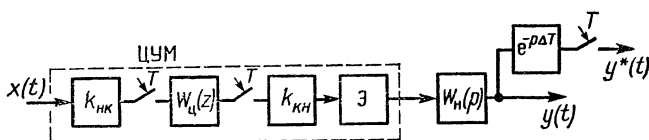


Рис. 10.11. Структурная схема разомкнутой цифровой системы РА

Рассмотрим разомкнутую цифровую систему РА, которая состоит из последовательного соединения цифровой управляющей машины и непрерывной части (рис. 10.11). Безынерционные звенья с коэффициентами передачи $k_{нк}$ и $k_{кн}$ учитывают наличие преобразователей НК и КН. Коэффициент передачи входного преобразователя

НК $k_{нк} = q_1^{-1}$, где q_1 — входной сигнал преобразователя, соответствующий единице младшего разряда. Аналогичным образом для выходного преобразователя КН получим $k_{кн} = q_2$. Цифровая управляющая машина и непрерывная часть системы соединены последовательно, поэтому передаточные функции разомкнутой цифровой системы РА в соответствии с выражением (10.31) имеют такой вид:

$$\begin{aligned} W_p(z) &= q_2 q_1^{-1} W_{ц}(z) W(z); \\ W_p(z, \varepsilon T) &= q_2 q_1^{-1} W_{ц}(z) W(z, \varepsilon T), \end{aligned} \quad (10.32)$$

где $W_{ц}(z)$ — дискретная передаточная функция цифровой ЭВМ; $W(z)$, $W(z, \varepsilon T)$ — передаточные функции импульсного фильтра системы.

В структурной схеме цифровой системы, приведенной на рис. 10.11, не учитывается временное запаздывание, которое возникает вследствие наличия запаздывающих звеньев в непрерывной части (например, в системах, в которых имеются радиолинии) и обработки данных в ЦВМ. Для учета времени запаздывания необходимо в непрерывную часть цифровой системы включить звено запаздывания с передаточной функцией $e^{-p\tau}$, где τ — время суммарного запаздывания в системе.

§ 10.5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

На рис. 10.12 изображена структурная схема замкнутой цифровой системы РА, в которой цифровой фильтр с передаточной функцией $W_{ц}(z)$ является последовательным корректирующим устройством. Передаточные функ-

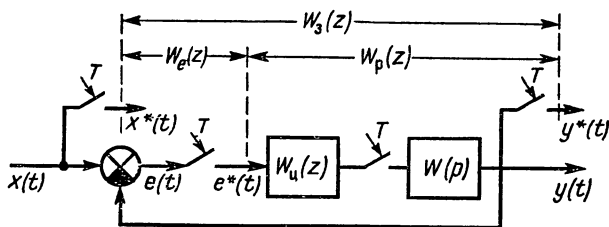


Рис. 10.12. Структурная схема замкнутой цифровой системы РА

ции замкнутой системы определяются так же, как и в непрерывных системах. Так, передаточная функция замкнутой системы через передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_s(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_p(z)}{1 + W_p(z)}, \quad (10.33)$$

а передаточная функция ошибки

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + W_p(z)}. \quad (10.34)$$

Полученные передаточные функции используются для анализа устойчивости и качества работы цифровых систем.

При определении смещенной передаточной функции замкнутой системы следует иметь в виду, что звено запаздывания, с помощью которого учитывается смещение во времени, подключается на выходе системы к цепи фиктивного дискретизатора. Поэтому, согласно (10.33),

$$W_s(z, \varepsilon T) = \frac{W_p(z, \varepsilon T)}{1 + W_p(z)}, \quad (10.35)$$

где $W_p(z, \varepsilon T)$ — смещенная передаточная функция разомкнутой системы (10.32).

Аналогичным образом можно найти передаточные функции цифровых систем, структурные схемы которых отличаются от рассмотренной.

Цифровые системы РА, так же как и непрерывные системы, в зависимости от ошибки в установившемся режиме подразделяются на статические и астатические. Ошибка в установившемся режиме в дискретные моменты времени находится по теореме о конечном значении (10.12). При входном сигнале $x(t) = B \cdot 1(t)$

$$e_c = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_e(z) B \frac{z}{z-1} = BW_e(1). \quad (10.36)$$

Ошибку, определяемую последним выражением, считают статической. Если эта ошибка не равна нулю, то цифровую систему называют статической, в противном случае система относится к классу астатических. Из выражения (10.36) следует, что в астатической системе передаточная функция ошибки равна нулю в точке $z=1$, что выполняется, если передаточная функция разомкнутой системы в соответствии с (10.34) имеет полюс в этой же точке.

В общем случае, когда передаточная функция разомкнутой цифровой системы содержит в точке $z=1$ полюс кратности ν , то порядок астатизма системы равен ν и дискретные значения ошибки равны нулю при входном сигнале вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_i t^i. \quad (10.37)$$

Выражения для частотных характеристик цифровых систем получаются из их передаточных функций путем замены оператора z на $e^{-j\omega T}$. Так как частота входит в показатель степени числа e , то частотные характеристики оказываются периодическими функциями частоты, период изменения которых равен $\pm\pi/T$. Следовательно, нельзя различить составляющие, частоты которых кратны частоте работы дискретизатора $\omega_T = 2\pi/T$. На рис. 10.13 показан годограф вектора $e^{j\omega T}$. Нулевой частоте на годографе соответствует точка на вещественной оси, при изменении частоты от нуля до π/T единичный вектор на плоскости комплексного переменного совершает один оборот.

Частотные характеристики цифровых систем РА описываются трансцендентными выражениями. Их определение связано со сложными расчетами, поэтому на практике применяются частотные характеристики относительно псевдочастоты. Переход к псевдочастоте основан на введении комплексной переменной

$$s = \frac{z-1}{z+1}. \quad (10.38)$$

Величину

$$jv = \frac{2}{T} s = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (10.39)$$

называют *псевдочастотой*.

Удобство псевдочастоты заключается в том, что на частотах на которых выполняется условие $\omega T < 2$, она приближенно равна круговой частоте. Нетрудно убедиться, что при изменении частоты $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq +\frac{\pi}{T}$ псевдочастота принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а ком-

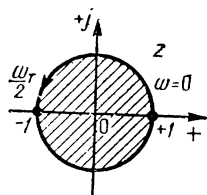


Рис. 10.13. Годограф $e^{j\omega T}$

плеская переменная s движется по мнимой оси от $-j\infty$ до $+j\infty$, т.е. внутренняя часть круга единичного радиуса на плоскости комплексной переменной z отображается в левую плоскость комплексной переменной s (рис. 10.14).

Таким образом, частотные характеристики относительно псевдо частоты определяются выражением

$$W(jv) = W(z) \Big|_{z=1+s/1-s} \quad \text{при } s = jv \frac{T}{2}. \quad (10.40)$$

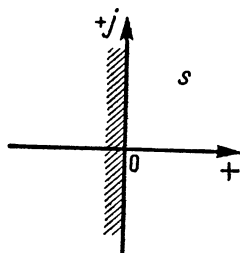


Рис. 10.14. Плоскость комплексного переменного s

Пример 10.4. Найти частотные характеристики разомкнутого дальномера с одним интегратором, передаточная функция которого определяется выражением (10.29).

Решение. Частотная характеристика дальномера относительно круговой частоты

$$W(j\omega) = \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} = -\frac{kT}{2} - j \frac{kT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики дальномера имеют вид

$$|W(j\omega)| = \frac{kT}{2 \sin \frac{\omega T}{2}}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2}.$$

Частотная характеристика относительно псевдо частоты в соответствии с выражением (10.40)

$$W(jv) = k \frac{1 - jv \frac{T}{2}}{jv}.$$

Тогда

$$|W(jv)| = \frac{k}{v} \sqrt{1 + \frac{T^2 v^2}{4}}; \quad \varphi(v) = -\frac{\pi}{2} - \arctg v \frac{T}{2}.$$

Очевидно, что построение частотных характеристик относительно псевдо частоты проще, чем относительно круговой частоты.

Определим частотный спектр сигнала на выходе дискретизатора. Последовательность единичных импульсов является периодической, поэтому может быть разложена в ряд Фурье:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}, \quad (10.41)$$

где

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T}$$

— коэффициенты ряда.

Сигнал на выходе дискретизатора с учетом (10.41) можно записать как

$$x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t}.$$

Применив к последнему выражению преобразование Лапласа и заменив в полученном выражении p на $j\omega$, найдем, что

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}\right). \quad (10.42)$$

Из этого выражения следует, что спектр сигнала на выходе дискретизатора является периодическим и содержит высокочастотные составляющие.

Так как сигнал на выходе дискретизатора существует только в дискретные моменты времени, то прохождение сигнала через дискретизатор связано с потерей информации. Однако при ограниченном спектре сигнала можно вновь восстановить сигнал по последовательности мгновенных импульсов на выходе дискретизатора. Для этого необходимо, чтобы выполнялось *условие теоремы Котельникова*:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_m. \quad (10.43)$$

Условие (10.43) используется для выбора частоты работы дискретизатора. При этом нужно иметь в виду, что реальные сигналы имеют неограниченные спектры, хотя и убывающие при стремлении частоты к бесконечности, поэтому условие теоремы Котельникова нужно рассматривать как приближенное утверждение, определяющее наименьшую частоту работы дискретизатора.

Аналогично (10.42) запишем частотную характеристику импульсного фильтра через частотную характеристику его приведенной непрерывной части:

$$W_u^*(j) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{пнч}}\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}\right). \quad (10.44)$$

С ростом частоты модуль частотной характеристики приведенной непрерывной части фильтра уменьшается, поэтому при нахождении частотной характеристики импульсного фильтра можно в выражении (10.44) ограничиться только двумя или тремя слагаемыми.

Проанализируем условия неискаженной передачи сигнала импульсным фильтром. Одно из условий определено — период работы дискретизатора должен удовлетворять условию теоремы Котельникова. Кроме того, для неискаженной передачи сигнала нужно отфильтровать все высокочастотные составляющие спектра сигнала (10.42). Для этого необходимо, чтобы ширина полосы пропускания приведенной непрерывной части импульсного фильтра была меньше граничной частоты в спектре сигнала. При этом приближенно можно считать, что частотные характеристики импульсного фильтра и приведенной непрерывной части связаны соотношением

$$W_{\Pi}(j\omega) \approx \frac{1}{T} W_{\text{пнч}}(j\omega).$$

Очевидно, что в этом случае частотные свойства импульсного фильтра совпадают со свойствами приведенной непрерывной части.

§ 10.6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ

Методы вычисления переходных процессов в цифровых системах РА основываются на Z -преобразовании переходного процесса, которое при единичном входном сигнале имеет вид

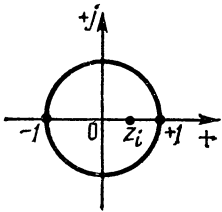
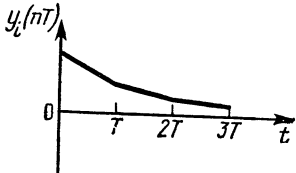
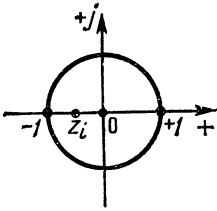
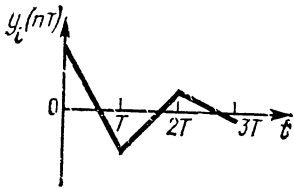
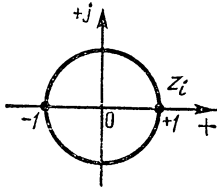
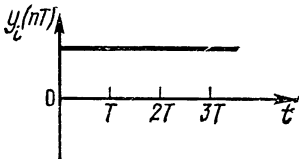
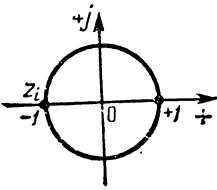
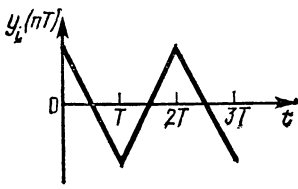
$$H(z) = W(z) \frac{z}{z-1}, \quad (10.45)$$

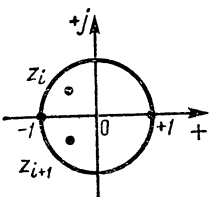
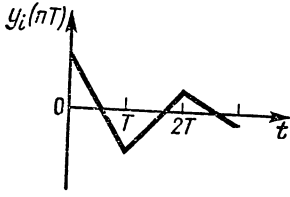
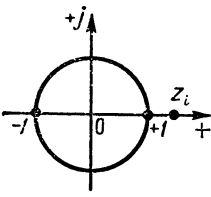
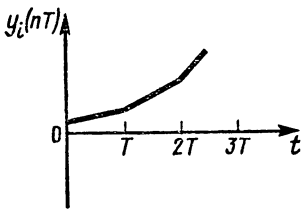
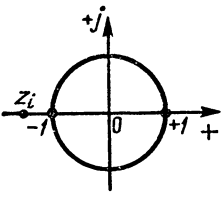
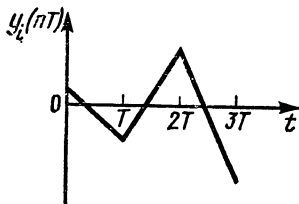
Для расчета дискрет переходного процесса нужно найти обратное Z -преобразование выражения (10.45). При этом следует воспользоваться формулой обращения (10.14), которая устанавливает, что дискретные значения переходного процесса

$$h(nT) = \sum_{i=1}^l \text{Res } H(z) z^{n-1} |_{z=z_i}, \quad (10.46)$$

где z_i — полюсы выражения $H(z)$; $i=1, 2, \dots, l$.

Таблица 10.1

Расположение z_i	$y_i(nT)$
	
	
	
	

Расположение z_i	$y_i(nT)$
	
	
	

Вычет в простом полюсе вычисляется по формуле

$$\text{Res } H(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) H(z) z^{n-1}. \quad (10.47)$$

Вычет в полюсе кратности k

$$\text{Res } H(z) z^{n-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_i)^k H(z) z^{n-1}]. \quad (10.48)$$

Характер изменения переходного процесса зависит от полюсов передаточной функции цифровой системы. В табл. 10.1 приведены составляющие переходного процесса для различных случаев расположения полюсов системы на плоскости комплексного переменного z .

Дискретные значения переходного процесса могут быть найдены также путем разложения $H(z)$ в ряде Лорана. Для этого нужно числитель $H(z)$ разделить на его знаменатель. В результате получим

$$H(z) = h_0 z^0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots h_k z^{-k} + \dots +. \quad (10.49)$$

Коэффициенты при z^{-i} определяют дискретные значения переходного процесса. Для наглядности графика переходного процесса рекомендуется его дискретные значения соединять прямолинейными отрезками.

Пример 10.5. Определить переходный процесс в цифровой системе, структурная схема которой дана на рис. 10.12. Передаточная функция корректирующего устройства системы равна единице, а передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(z) = k \frac{1 - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta}}.$$

Решение. Для переходного процесса в соответствии с (10.45) Z-преобразование

$$H(z) = W_s(z) \frac{z}{z-1} = \frac{k(1 - e^{-\beta})}{z + d} \frac{z}{z-1},$$

где $d = k(1 - e^{-\beta}) - e^{-\beta}$ — постоянный коэффициент; $W_s(z)$ — передаточная функция замкнутой системы, вычисляемая по формуле (10.33).

Согласно (10.46) и (10.47),

$$h(nT) = \frac{k}{1+k} [1 - (-d)^n].$$

На рис. 10.15 показан график переходного процесса при $k=1$ и $\beta=1$.

Пример 10.6. Найти переходный процесс относительно ошибки в дальнометре с одним интегратором при $kT=1,5$.

Решение. Передаточная функция дальнометра в разомкнутом

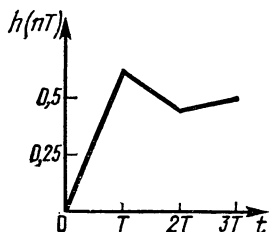


Рис. 10.15. Переходный процесс в цифровой системе

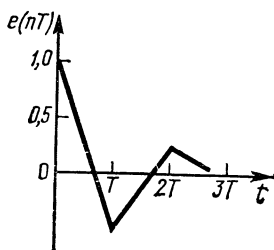


Рис. 10.16. Переходный процесс в цифровом дальнометре относительно ошибки

состояний определяется выражением (10.29). Для переходного процесса Z -преобразование найдем по формуле

$$H_e(z) = W_e(z) \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z+0,5}, \quad (10.50)$$

где $W_e(z)$ — передаточная функция ошибки, определяемая выражением (10.34).

Обратное Z -преобразование (10.50) в соответствии с формулами (10.46) и (10.47) имеет вид $e(nT) = (-0,5^n)$.

Установившееся значение ошибки равно нулю, так как цифровой дальномер с одним интегратором — это система с астатизмом первого порядка. На рис. 10.16 показан график переходного процесса в дальномере относительно ошибки.

Рассмотрим еще один метод расчета переходных процессов в цифровых системах РА, который базируется на *разностных уравнениях системы*. В общем виде дискретная передаточная функция системы

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^l + a_{l-1} z^{l-1} + a_{l-2} z^{l-2} + \dots + a_0}.$$

Представим последнее выражение через отрицательные степени z :

$$W(z) = \frac{c_m z^{m-l} + c_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + c_0 z^{-l}}{1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}}. \quad (10.51)$$

Из выражения (10.51) следует следующее соотношение для Z -преобразования выходного сигнала:

$$Y(z) = [c_m z^{m-l} + c_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + c_0 z^{-l}] X(z) - [a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}] Y(z). \quad (10.52)$$

Так как в соответствии с первой теоремой смещения (10.9)

$$Z[x(t - kT)] = z^{-k} X(z), \quad Z[y(t - kT)] = z^{-k} Y(z),$$

то, согласно (10.52), разностное уравнение системы относительно дискретных значений входного и выходного сигналов

$$\begin{aligned} y(nT) = & c_m x[(n-l+m)T] + c_{m-1} x[(n-l+m-1)T] + \\ & + \dots + c_0 x[(n-l)T] - a_{l-1} y[(n-1)T] - a_{l-2} y \times \\ & \times [(n-2)T] - \dots - a_0 y[(n-l)T]. \end{aligned} \quad (10.53)$$

В соответствии с (10.53) рекуррентные формулы расчета переходного процесса при известном входном сиг-

коэффициенты ошибок рассчитывают по формулам

$$\begin{aligned} C_0 &= W_e(z)|_{z=1}; \quad C_1 = zT \frac{d}{dz} W_e(z)|_{z=1}; \\ C_2 &= 2 \left[T \frac{d}{dz} W_e(z) + zT \frac{d^2}{dz^2} W_e(z) \right] zT|_{z=1}. \end{aligned} \quad (10.57)$$

В астатических системах несколько первых коэффициентов ошибок равны нулю: $C_0 = C_1 = \dots = C_{v-1} = 0$, где v — порядок астатизма. В этом случае ошибка относительно сигнала (10.37) равна нулю.

Ошибка системы

$$e(t) = x(t) - y(t), \quad (10.58)$$

где $x(t)$ — стационарный случайный сигнал с математическим ожиданием m_x ; $y(t)$ — выходной сигнал системы.

Найдем среднюю квадратическую ошибку системы, на вход которой подается воздействие

$$f(t) = x(t) + n(t), \quad (10.59)$$

где $n(t)$ — случайная стационарная помеха с нулевым математическим ожиданием.

Для ошибки (10.58) Z-преобразование определяется выражением

$$E(z) = W_e(z) X(z) - W_s(z) n(z), \quad (10.60)$$

где $W_e(z)$ — передаточная функция ошибки; $W_s(z)$ — передаточная функция замкнутой системы.

После окончания переходного процесса суммарная ошибка (10.58) образует дискретный сигнал, математическое ожидание которого рассчитывается по формуле (10.60) с помощью теоремы о конечном значении (10.12):

$$m_e = \lim_{z \rightarrow 1} W_e(z) m_x. \quad (10.61)$$

Средняя квадратичная ошибка системы вычисляется через ее спектральную плотность, которая находится так же, как и в непрерывных системах. Поэтому аналогично (6.19) спектральная плотность ошибки

$$\begin{aligned} S_e(z) &= |W_e(z)|^2 S_x(z) + |W_s(z)|^2 S_n(z) + W_e(z^{-1}) W_s(z) \times \\ &\times S_{xn}(z) + W_e(z) W_s(z^{-1}) S_{nx}(z), \end{aligned} \quad (10.62)$$

где $S_x(z)$ — спектральная плотность сигнала; $S_n(z)$ — спектральная плотность помехи; $S_{xn}(z)$, $S_{nx}(z)$ — взаимные спектральные плотности.

Дисперсия ошибки системы

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_e(z) \frac{dz}{z}. \quad (10.63)$$

Если для расчета дисперсии ошибки использовать спектральную плотность относительно псевдочастоты (10.39), то в соответствии с (10.63)

$$\sigma_e^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(v) \frac{dv}{\left|1 + jv \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (10.64)$$

Для вычисления интеграла (10.64) используем формулы, приведенные в приложении П.2. В результате найдем, что средняя квадратическая ошибка системы

$$\sigma_e = [\sigma_{ex}^2 + \sigma_{еп}^2 + \sigma_{exп}^2 + \sigma_{епх}^2]^{1/2}, \quad (10.65)$$

где σ_{ex}^2 — дисперсия ошибки относительно сигнала; $\sigma_{еп}^2$ — дисперсия ошибки из-за действия помехи; $\sigma_{exп}^2$, $\sigma_{епх}^2$ — составляющие, обусловленные корреляцией сигнала с помехой и помехи с сигналом.

Если сигнал и помеха в (10.59) некоррелированы, то последние два слагаемых в выражениях (10.62) и (10.65) равны нулю.

Иногда точность цифровых систем РА оценивается суммарной средней квадратической ошибкой:

$$\sigma_{\Sigma} = [m_e^2 + \sigma_e^2]^{1/2}, \quad (10.66)$$

где m_e — математическое ожидание ошибки, вычисляемой по формуле (10.61).

Пример 10.7. Определить суммарную среднюю квадратичную ошибку цифрового дальномера с одним интегратором, на вход которого действует помеха в виде белого шума и сигнал (измеряемая дальность) $R = R_0 + \dot{R}t$, где R_0 — начальное значение дальности; \dot{R} — скорость изменения дальности.

Решение. Передаточные функции дальномера в соответствии с выражениями (10.29), (10.33) и (10.34)

$$W_a(z) = \frac{kT}{z - 1 + kT}, \quad W_e(z) = \frac{z - 1}{z - 1 + kT}. \quad (10.67)$$

Динамическую ошибку дальномера вычислим через коэффициенты ошибок. В результате найдем, что

$$m_e = C_1 \dot{R} = \frac{1}{k} \dot{R},$$

где C_1 — коэффициент ошибки по скорости, рассчитываемый по формуле (10.57).

Спектральная плотность ошибки дальномера относительно помехи, согласно (10.62),

$$S_e(z) = \left| \frac{kT}{z-1+kT} \right|^2 S(0), \quad (10.68)$$

где $S(0)$ — спектральная плотность белого шума.

Спектральную плотность относительно псевдочастоты найдем по (10.68) с учетом (10.40):

$$S_e(v) = \left| \frac{kT \left(1 - jv \frac{T}{2} \right)}{jv \frac{T}{2} (2 - kT) + kT} \right|^2 S(0).$$

Дисперсия ошибки измерения, возникающей из-за помехи,

$$\sigma_{en}^2 = \frac{kT}{2 - kT} S(0). \quad (10.69)$$

Для вычисления интеграла (10.69) использована формула для $n=1$, приведенная в приложении П.2.

Из выражения (10.69) следует, что с увеличением периода дискретизации ошибка измерения дальности растет и при $kT=2$ будет равна бесконечности, что связано с нарушением устойчивости дальномера.

Суммарная средняя квадратическая ошибка дальномера с одним интегратором в соответствии с (10.66)

$$\sigma_{\Sigma} = \left[\frac{\dot{R}^2}{k^2} + \frac{kT}{2 - kT} S(0) \right]^{1/2}.$$

§ 10.8. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

При анализе переходных процессов было установлено, что переходный процесс будет затухающим, если все полюсы цифровой системы РА на плоскости комплексного переменного z расположены внутри круга единичного радиуса. Это условие является необходимым и достаточным для устойчивости системы. Полюсы системы — корни характеристического уравнения, которое получается из передаточной функции замкнутой системы путем приравнивания ее знаменателя нулю:

$$1 + W_p(z) = 0, \quad (10.70)$$

где $W_p(z)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Пример 10.8. Определить условие устойчивости дальномера с одним интегратором, передаточная функция которого в разомкнутом состоянии определяется выражением (10.29),

Решение. Характеристическое уравнение дальномера: $z-1+kT=0$.

Условие устойчивости: $|z_1|=|1-kT|<1$ или $k<\frac{2}{T}$.

Расположение корней характеристического уравнения (10.70) внутри круга единичного радиуса соответствует расположению корней на плоскости комплексного переменного p слева от мнимой оси в полосе $\pm\pi/T$, которое не может быть проверено ни одним из критериев, используемых для оценки устойчивости непрерывных систем РА. Однако если с помощью подстановки (10.38) в уравнении (10.70) перейти к комплексной плоскости s (см. рис. 10.14), то область устойчивости оказывается вся левая полуплоскость и для оценки расположения корней на плоскости s могут быть использованы критерии устойчивости, разработанные для непрерывных систем РА. Так, для проверки устойчивости цифровой РА по критерию Гурвица необходимо от характеристического уравнения (10.70) перейти к уравнению

$$1 + W_p(s) = [1 + W_p(z)]_{z=\frac{1+s}{1-s}} = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_0 = 0. \quad (10.71)$$

Так же как и в непрерывных системах, нужно составить матрицу Гурвица:

$$\begin{bmatrix} b_{l-1} & b_{l-3} & b_{l-5} & \dots & 0 \\ b_l & b_{l-2} & b_{l-4} & \dots & 0 \\ 0 & b_{l-1} & b_{l-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & b_0 \end{bmatrix}$$

Условия устойчивости при $b_l > 0$

$$\Delta_1 = b_{l-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{l-1} & b_{l-3} \\ b_l & b_{l-2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_{l-1} > 0.$$

Если хотя бы один из определителей меньше или равен нулю, то цифровая система неустойчива. Условие $\Delta_{l-1}=0$ определяет границу устойчивости, из этого уравнения находится критический коэффициент.

Пример 10.9. Оценить условия устойчивости для цифровой системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = kT \frac{(1 - e^{-\beta}) z}{(z-1)(z - e^{-\beta})}. \quad (10.72)$$

Решение. Характеристическое уравнение системы в соответствии с (10.70) и (10.72)

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

где $a_2 = 1$; $a_1 = kT(1 - e^{-\beta}) - 1 - e^{-\beta}$; $a_0 = e^{-\beta}$.

Характеристическое уравнение (10.71) принимает вид

$$b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0,$$

где $b_2 = a_2 - a_1 + a_1$; $b_1 = 2a_2 - 2a_0$; $b_0 = a_2 + a_1 + a_0$.

Условия устойчивости:

$$b_2 = 2(1 - e^{-\beta}) - kT(1 - e^{-\beta}) > 0; \quad b_1 = 2(1 - e^{-\beta}) > 0;$$

$$b_0 = kT(1 - e^{-\beta}) > 0.$$

Так как $e^{-\beta} < 1$, то второе и третье условия устойчивости выполняются при любых коэффициентах k и β , а первое только в том случае, когда

$$k < \frac{2}{T} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}. \quad (10.73)$$

Если в выражении (10.73) поставить знак равенства, то получим уравнение для границы устойчивости.

Устойчивость цифровых систем РА может быть оценена и по частотным критериям устойчивости. Так, для оценки устойчивости по критерию Найквиста нужно построить годограф частотной характеристики разомкнутой системы относительно круговой частоты или относительно псевдочастоты на основе s -преобразования (10.39). В том и другом случае цифровая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $[-1, j0]$.

Близость системы к границе устойчивости определяется запасами устойчивости. *Запас устойчивости по усилению* вычисляется на критической частоте, на которой ФЧХ разомкнутой системы равна $-\pi$:

$$\alpha = \frac{1}{|W_p(j\omega_{кр})|},$$

где $\omega_{кр}$ — критическая частота.

Запас устойчивости по фазе рассчитывается на частоте среза:

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi_p(\omega_{ср}),$$

где $\omega_{ср}$ — частота среза.

Пример 10.10. Определить, используя критерий устойчивости Найквиста, критический коэффициент усиления в цифровой систе-

ме, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = k_1 \frac{1 - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta}}.$$

Решение. Разомкнутая система устойчива, так как ее полюс $z_1 = e^{-\beta} < 1$.

На рис. 10.17 построен годограф частотной характеристики разомкнутой системы, из которого видно, что $\omega_{кр} = \pi/T$. Критический коэффициент найдем из условия $W_p(j\omega_{кр}) = -1$. В результате получим

$$k_{1кр} = \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}.$$

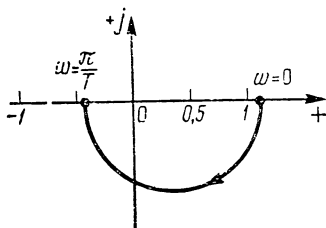


Рис. 10.17. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы

§ 10.9. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Синтез цифровых систем РА сводится к выбору цифрового корректирующего устройства, последовательное включение которого с объектом управления позволяет получить систему с желаемыми характеристиками (рис. 10.18). Рассмотрим синтез разомкнутой цифровой систе-

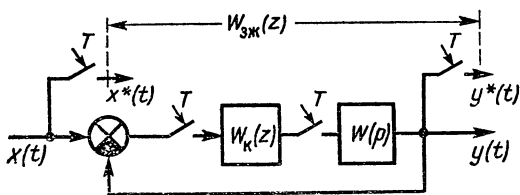


Рис. 10.18. Структурная схема системы с последовательным корректирующим устройством

мы, импульсная переходная функция которой должна соответствовать импульсной переходной функции заданного аналогового эквивалента, т. е. $\omega_c(nT) = \omega_a(t) |_{t=nT}$.

Желаемая передаточная функция проектируемой системы при таком методе синтеза определяется как Z-преобразование импульсной переходной функции аналогового эквивалента:

$$W_{ж}(z) = Z[\omega_a(t)]. \quad (10.74)$$

Передаточная функция последовательного цифрового корректирующего устройства

$$W_K(z) = W_{\text{ж}}(z)/W(z), \quad (10.75)$$

где $W(z)$ — дискретная передаточная функция объекта управления.

Цифровая система РА, спроектированная данным методом, совпадает по своим свойствам с аналоговым эквивалентом только в смысле равенства дискретных значений импульсных переходных функций, т.е. при входном сигнале в виде δ -функции. При других входных сигналах совпадение дискретных значений выходных сигналов в цифровой системе и аналоговом эквиваленте не гарантируется. Проиллюстрируем это положение на конкретном примере.

Пример 10.11. Найти передаточную функцию цифрового корректирующего устройства в разомкнутой системе, предназначенной для управления астатическим объектом, передаточная функция которого с формирующим элементом $W(p) = k(1 - e^{-pT})/p^2$.

Передаточная функция аналогового эквивалента

$$W_a(p) = \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Решение. В соответствии с выражением (10.74) желаемая передаточная функция проектируемой системы

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{b_1 z}{(z - e^{-\beta_1})(z - e^{-\beta_2})},$$

$$\text{где } b_1 = \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-\beta_1} - e^{-\beta_2}); \quad \beta_1 = \frac{T}{T_1}; \quad \beta_2 = \frac{T}{T_2}.$$

Дискретная передаточная функция объекта управления определяется выражением (10.29). Передаточная функция корректирующего устройства, согласно (10.75),

$$W_K(z) = k_K \frac{z(z-1)}{(z - e^{-\beta_1})(z - e^{-\beta_2})},$$

где $k_K = b_1/(kT)$ — коэффициент передачи корректирующего устройства.

Найдем значения выходных сигналов в цифровой системе и ее аналоговом эквиваленте в установившемся режиме при выходном сигнале $x(t) = 1(t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y_a(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} W_a(p) = 1; \\ \lim_{\infty \rightarrow n} y_{\text{ц}}(nT) &= \lim_{z \rightarrow 1} W_{\text{ж}}(z) \neq 1. \end{aligned}$$

С уменьшением периода дискретизации сигналов расхождение между дискретными значениями переходных процессов уменьшается

и при $T=0$ переходные процессы совпадают, что следует из выражения $\lim_{T \rightarrow 0} T W_{\text{ж}}(1) = 1$.

Рассмотрим синтез разомкнутых цифровых систем, который гарантирует совпадение переходных процессов в проектируемой системе и ее аналоговом эквиваленте при входном сигнале $x(t) = 1(t)$. В этом случае желаемая передаточная функция проектируемой системы

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{z-1}{z} H(z), \quad (10.76)$$

где $H(z)$ — Z -преобразование переходной функции аналогового эквивалента.

В цифровых системах с передаточной функцией

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{d_{l-1} z^{l-1} + d_{l-2} z^{l-2} + \dots + d_0}{z^l} \quad (10.77)$$

переходный процесс заканчивается за конечный промежуток времени. В этом нетрудно убедиться, если разложить $H(z)$ в ряд Лорана (10.49). Действительно,

$$H(z) = [d_{l-1} z^{-1} + d_{l-2} z^{-2} + \dots + d_0 z^{-l}] X(z).$$

В области действительного переменного при $x(t) = 1(t)$

$$h(nT) = d_{l-1} 1(nT - T) + d_{l-2} 1(nT - 2T) + \dots + d_0 1(nT - lT).$$

Из последнего выражения следует, что переходный процесс заканчивается за время, равное lT ; в последующие дискретные моменты времени значения $h(nT)$ не изменяются и остаются равными $h(lT)$.

Если нули и полюсы передаточной функции объекта управления цифровой системы на плоскости комплексного переменного z расположены внутри круга единичного радиуса, то можно спроектировать систему, в которой длительность переходного процесса равна одному периоду работы дискретизатора.

Пример 10.12. Определить передаточную функцию цифрового корректирующего устройства системы, рассмотренной в примере 10.11, при условии, что переходный процесс заканчивается за один такт работы дискретизатора.

Решение. В системах с длительностью переходного процесса, равной одному такту работы дискретизатора, желаемая передаточная функция $W_{\text{ж}}(z) = 1/z$. Передаточную функцию цифрового корректирующего устройства найдем по формуле (10.75):

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{1}{z} \frac{z-1}{kT},$$

где $W(z) = \frac{kT}{z-1}$ — передаточная функция объекта управления.

Рассмотрим синтез цифровых систем в частотной области. В этом случае желаемая передаточная функция проектируемой системы определяется частотными характеристиками аналогового эквивалента системы на интервале частот $0 \leq \omega T \leq \pi$. Обычно требуется, чтобы в заданном диапазоне частот совпадали только АЧХ цифровой системы и ее аналогового эквивалента и нет необходимости в совпадении ФЧХ.

Для нахождения желаемой передаточной функции определим связь между операторами p и z . Так как $z = e^{pT}$, то

$$p = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right]. \quad (10.78)$$

Если в передаточную функцию аналогового эквивалента проектируемой системы вместо оператора p подставить первое слагаемое (10.78), то желаемая передаточная функция будет иметь вид

$$W_{\text{ж}}(z) = W_{\text{а}}(p) \Big|_{p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (10.79)$$

Тогда по формуле (10.75) вычисляется передаточная функция цифрового корректирующего устройства.

В выражение (10.79) можно включить и большее число слагаемых (10.78), но при этом значительно усложняется цифровое корректирующее устройство без заметного выигрыша точности приближения АЧХ цифровой системы к характеристике аналогового эквивалента.

Данные методы синтеза разомкнутых систем пригодны и для проектирования замкнутых цифровых систем РА. Желаемая передаточная функция замкнутой системы находится по аналоговому эквиваленту, после чего рассчитывается желаемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{рж}}(z) = \frac{W_{\text{аж}}(z)}{1 - W_{\text{эж}}(z)}.$$

Передаточная функция цифрового корректирующего устройства вычисляется по формуле (10.75).

§ 10.10. ЦИФРОВЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

После определения передаточных функций корректирующих устройств следующим этапом синтеза цифро-

вой системы является их техническая реализация. Для этого используются следующие методы:

1) метод программирования, применяемый в системах с ЦВМ. Реализация корректирующего устройства сводится к составлению программы по его разностному уравнению;

2) метод, базирующийся на использовании цифровых фильтров, реализуемых на элементах цифровой техники по алгоритму, определяемому разностным уравнением корректирующего устройства.

В зависимости от вида представления передаточной функции цифрового фильтра различают формы его структурных схем. Рассмотрим основные из них.

Передаточную функцию цифрового фильтра запишем в виде

$$W_K(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{d_m z^{m-l} + d_{m-1} z^{m-1-l} + \dots + d_0 z^{-l}}{1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}}, \quad (10.80)$$

где $U(z)$, $X(z)$ — Z-преобразования выходного и входного сигналов фильтра.

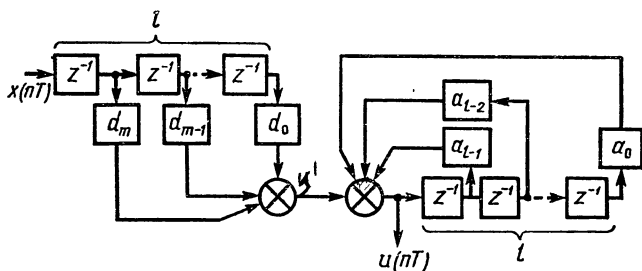


Рис. 10.19. Прямая форма цифрового фильтра

Из последнего выражения следует, что

$$U(z) = \sum_{i=1}^m d_i z^{i-l} X(z) - \sum_{j=0}^{l-1} a_j z^{j-l} U(z). \quad (10.81)$$

На рис. 10.19 в соответствии с (10.81) для $m=l-1$ построена структурная схема фильтра, называемая *прямой формой цифрового фильтра*. Для реализации такого фильтра требуется $2l$ линий задержки.

Запишем уравнение (10.80) следующим образом:

$$U(z) = F(z) \sum_{i=0}^m d_i z^{i-l}; \quad (10.82)$$

$$F(z) = X(z) - \sum_{j=0}^{l-1} a_j z^{j-l} F(z), \quad (10.83)$$

где $F(z)$ — Z-преобразование промежуточной переменной.

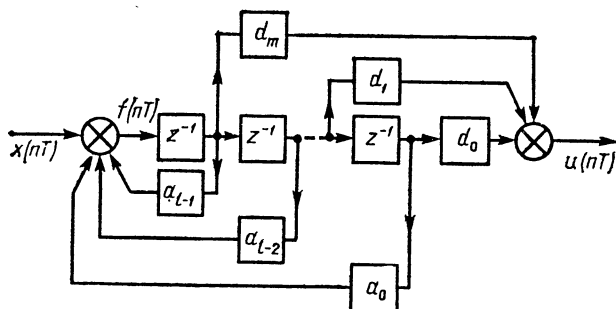


Рис. 10.20. Каноническая форма цифрового фильтра

Уравнениям (10.82) и (10.83) соответствует структурная схема фильтра, показанная на рис. 10.20. Для создания такого фильтра требуется l линий задержек, т.е. в два раза меньше, чем при прямой форме фильтра. Структурные схемы цифровых фильтров, число элементов которых равно порядку передаточной функции, называют *каноническими*. Помимо рассмотренной канонической структуры существуют и другие: последовательная и параллельная.

Для определения последовательной канонической структуры цифрового фильтра необходимо найти нули и полюсы фильтра. При этом выражение (10.80) можно записать в виде

$$W_K(z) = k \frac{1 + z_{01} z^{-1}}{1 + z_1 z^{-1}} \frac{\beta_2 + \beta_1 z^{-1} + \beta_0 z^{-2}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_0 z^{-2}} \cdots \frac{1}{1 + z_l z^{-1}}. \quad (10.84)$$

Таким образом, цифровой фильтр состоит из последовательного соединения цифровых фильтров первого

порядка, соответствующих вещественным полюсам (рис. 10.21, а), и фильтров второго порядка, соответствующих паре комплексно-сопряженных полюсов (рис. 10.21, б). Представление передаточной функции в виде (10.84) называют *последовательным программированием*, а структуру фильтра — *последовательной канонической формой*.

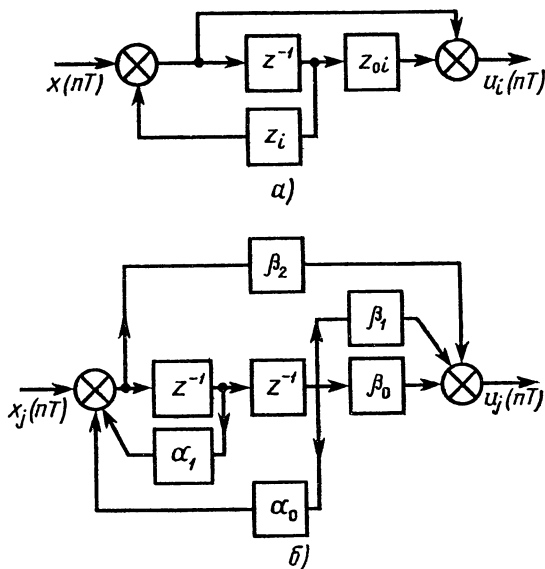


Рис. 10.21. Каноническая форма цифрового фильтра:
а — первого порядка; б — второго порядка

Представление передаточной функции цифрового фильтра в виде

$$W_K(z) = \sum_{i=1}^l W_{ki}(z)$$

называют *параллельным программированием*. Цифровой фильтр в этом случае представляет собой параллельное соединение фильтров первого и второго порядков. Такую структуру называют *параллельной канонической формой*. На практике преимущественно используются последовательные и параллельные канонические формы цифровых фильтров, так как они более удобны

для технической реализации и обеспечивают по сравнению с прямой формой более высокую точность.

Рассмотрим ошибки цифровых фильтров, основными из которых являются следующие:

1) ошибки из-за квантования входных сигналов по уровню;

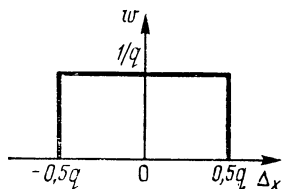


Рис. 10.22. Плотность распределения вероятности ошибки квантования по уровню

2) ошибки из-за округления результатов арифметических операций;

3) ошибки из-за округления коэффициентов передаточных функций фильтров при их реализации.

Методы анализа ошибок цифровых фильтров базируются на следующих предположках:

1) ошибки из-за квантования входных сигналов по уровню распределены равномерно в диапазоне от $-0,5q$ до $+0,5q$, где q — шаг квантования;

2) составляющие ошибки цифрового фильтра от выборки к выборке статистически независимы;

3) шаг квантования сигналов мал по сравнению с квантуемыми сигналами.

При таких предположениях плотность распределения вероятности ошибки квантования (рис. 10.22)

$$w(\Delta_x) = 1/q,$$

где Δ_x — ошибка (шум) квантования.

Математическое ожидание и дисперсия ошибки квантования следующие:

$$m_{\Delta_x} = \int_{-0,5q}^{0,5q} \Delta_x w(\Delta_x) d\Delta_x = 0; \quad (10.85)$$

$$\sigma_{\Delta_x}^2 = \int_{-0,5q}^{0,5q} \Delta_x^2 w(\Delta_x) d\Delta_x = q^2/12.$$

Из принятых допущений следует, что ошибка квантования является белым шумом с дисперсией, равной (10.85). Этот шум приводит к появлению ошибки, дисперсия которой на основании выражения (10.64) определяется по формуле

$$\sigma_k^2 = \frac{q^2}{12} \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_k(jv)|^2 \frac{dv}{\left|1 + jv \frac{T}{2}\right|^2}, \quad (10.86)$$

где $W_k(jv)$ — частотная характеристика цифрового фильтра относительно псевдочастоты.

Очевидно, что средняя квадратическая ошибка цифрового фильтра из-за квантования входного сигнала не зависит от структурной схемы фильтра, а определяется только его передаточной функцией.

Пример 10.13. Найти ошибку из-за квантования входного сигнала по уровню в цифровом фильтре с передаточной функцией

$$W_k(z) = \frac{z}{z - a_0}.$$

Решение. Относительно псевдочастоты передаточная функция фильтра имеет вид

$$W_k(jv) = \frac{1 + jv \frac{T}{2}}{(1 + a_0) jv \frac{T}{2} + 1 - a_0}.$$

Используя выражение (10.86) и формулу, приведенную в приложении П2 для $n=1$, вычислим ошибку из-за квантования входного сигнала по уровню:

$$\sigma_k^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1 - a_0^2}.$$

Из этого выражения следует, что при полюсе фильтра близком к единице, дисперсия ошибки из-за квантования входного сигнала по уровню может быть значительной.

Проанализируем ошибку, возникающую из-за округления результатов арифметических операций в цифровом фильтре. Основное влияние на точность фильтра оказывает округление результатов умножения. Действительно, если перемножается два числа меньше единицы, каждое из которых имеет α разрядов, то их произведение содержит 2α разрядов. Из-за ограниченного числа разрядов фильтра младшие разряды отбрасываются и результат округляется. Так как ошибки округления в различные моменты времени не зависят друг от друга, то для их определения необходимо в узлы фильтра, в которых производится округление, ввести источники белого шума с интенсивностью (10.85). Различным структурным схемам цифровых фильтров соответствуют различные точки введения белого шума, поэтому ошибка

из-за округления операции умножения зависит от выбранной структуры фильтра. На рис. 10.23 показана последовательная каноническая форма фильтра с передаточной функцией

$$W_K(z) = \frac{1}{1 + z_1 z^{-1}} \frac{b_0 z^{-1}}{1 + z_2 z^{-1}}, \quad (10.87)$$

где z_1, z_2 — полюсы фильтра.

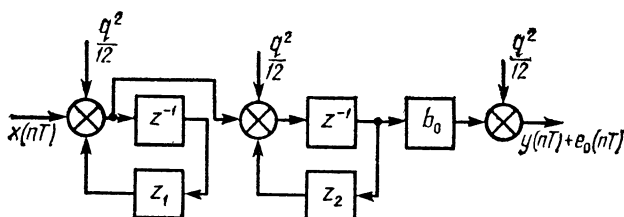


Рис. 10.23. К оценке средней квадратической ошибки канонического фильтра последовательной формы

Составляющие дисперсии ошибок из-за округления результатов умножения на значение полюса z_1

$$\sigma_{01}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{b_0^2}{2(1 - z_1^2)(1 - z_2^2)(1 - z_1 z_2)},$$

на значение полюса z_2

$$\sigma_{02}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{b_0^2}{1 - z_2^2},$$

на коэффициент b_0

$$\sigma_{03}^2 = q^2/12.$$

Дисперсия суммарной ошибки из-за округления результатов умножения в цифровом фильтре с передаточной функцией (10.87)

$$\sigma_0^2 = \sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2 + \sigma_{03}^2.$$

Представим передаточную функцию фильтра в виде

$$W_K(z) = A_1 \frac{z^{-1}}{1 + z_1 z^{-1}} + A_2 \frac{z^{-1}}{1 + z_2 z^{-1}}, \quad (10.88)$$

где $A_1 = \frac{b_0 z_1}{z_1 - z_2}$; $A_2 = \frac{b_0 z_2}{z_2 - z_1}$ — постоянные коэффициенты.

На рис. 10.24 изображена структурная схема фильтра, соответствующая передаточной функции (10.88).

Составляющие ошибок округления результатов умножения входного сигнала на коэффициент A_1

$$\sigma_{01}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1 - z_1^2},$$

на значение полюса z_1

$$\sigma_{02}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1 - z_1^2}.$$

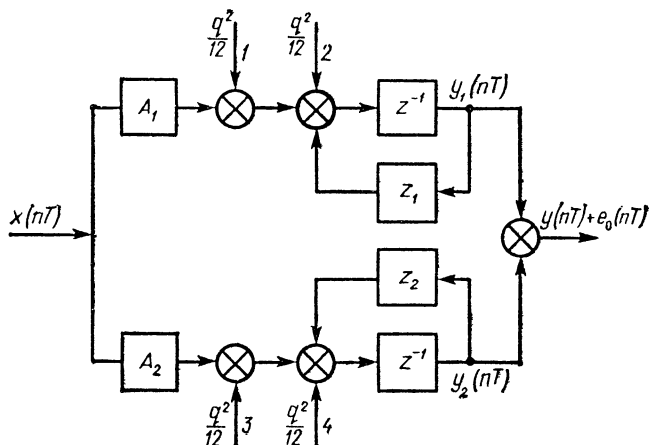


Рис. 10.24. К оценке средней квадратической ошибки цифрового фильтра параллельной формы

Аналогично для второй части структурной схемы найдем, что

$$\sigma_{03}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1 - z_2^2}; \quad \sigma_{04}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1 - z_2^2}.$$

Дисперсия суммарной ошибки из-за округления результатов умножения в цифровом фильтре, выполненного по параллельной канонической форме

$$\sigma_0^2 = \frac{q^2}{6} \left[\frac{1}{1 - z_1^2} + \frac{1}{1 - z_2^2} \right]. \quad (10.89)$$

Отметим, что если коэффициенты A_1 и A_2 умножить на сигналы $y_1(nT)$ и $y_2(nT)$, то дисперсия из-за округле-

ния операций умножения

$$\sigma_0^2 = \frac{q^2}{12} \left[2 + \frac{1}{1 - z_1^2} + \frac{1}{1 - z_2^2} \right],$$

т. е. меньше значения (10.89). Это обстоятельство нужно учитывать при технической реализации цифровых фильтров.

Третьим видом ошибок в цифровых фильтрах является округление коэффициентов передаточной функции фильтров, связанное с ограниченным числом разрядов регистров фильтра, в результате чего коэффициенты передаточной функции оказываются отличными от расчетных. Это ведет к изменению полюсов фильтра, что и является причиной возникновения ошибок. Небольшую чувствительность изменению значений полюсов имеют фильтры, выполненные по прямой форме, причем степень чувствительности возрастает по мере роста порядка передаточной функции фильтра. По этим причинам цифровые фильтры следует выполнять по последовательной или параллельной канонической форме.

§ 10.11. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

Системы РА, в которых сигналы преобразуются в последовательность импульсов, называют *импульсными*. В таких системах длительность импульсов обычно не равна периоду их следования. Наиболее широко применяются системы, в которых генерируются импульсы постоянной длительности с амплитудой $A(nT)$, пропорциональной входным сигналам в дискретные, равноотстоящие друг от друга моменты времени $x(nT)$ (рис. 10.25, а). Подобный процесс преобразования называют *амплитудно-импульсной модуляцией* с коэффициентом амплитудной модуляции $k_a = A(nT)/x(nT)$.

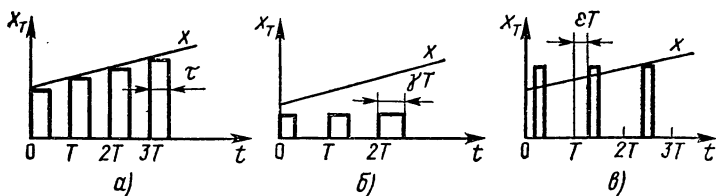


Рис. 10.25. Виды импульсной модуляции:

а — амплитудная; б — широтная; в — время-импульсная

Если импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал в последовательность импульсов с постоянной амплитудой длительностью $\tau(nT)$, пропорциональной дискретным значениям входного сигнала, то имеет место *широтнo-импульсная модуляция* (рис. 10.25, б) с коэффициентом преобразования $k_{\text{ш}} = \tau(nT)/x(nT)$.

Импульсный элемент, который генерирует импульсы постоянной амплитуды и длительности, но сдвинутых относительно дискретных моментов времени на значение $\varepsilon(nT)$, пропорциональное дискретным значениям входного сигнала, осуществляет *время-импульсную модуляцию* (рис. 10.25, в) с коэффициентом $k_{\text{в}} = \varepsilon(nT)/x(nT)$.

Наибольшее распространение нашли импульсные системы с амплитудно-импульсной модуляцией, для анализа и синтеза которых могут быть использованы рассмотренные методы исследования цифровых систем РА.

Импульсный элемент также можно представить в виде последовательного соединения дискретизатора и экстраполятора, передаточная функция которого аналогична выражению (10.5):

$$W_{\text{э}}(p) = \frac{1 - e^{-p\tau T}}{p},$$

где $\gamma = \tau/T$ — скважность работы импульсного элемента; τ , T — длительность и период следования импульсов.

Проиллюстрируем особенности анализа импульсных систем РА.

Рассмотрим импульсную систему автоподстройки частоты, которая нашла широкое применение в различных радиотехнических устройствах. Передатчики, собранные по такой схеме, используются в системах радиосвязи и радиолокации. Функциональная схема системы изображена на рис. 10.26, а. Автогенератор системы (АГ) работает в импульсном режиме и обеспечивает необходимую мощность колебаний. Стабилизацию частоты колебаний обеспечивает мало-мощный эталонный генератор (ЭГ), а импульсный режим работы системы автоподстройки частоты — импульсный модулятор (ИМ). Перестройка частоты автогенератора осуществляется управляющим элемен-

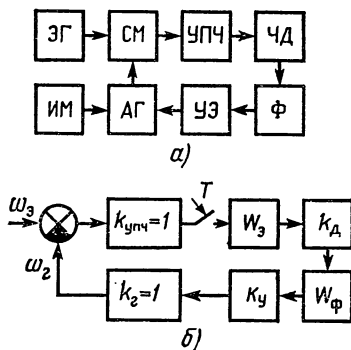


Рис. 10.26. Импульсная система автоподстройки частоты:
а — функциональная схема; б — структурная схема

том (УЭ). На рис. 10.26, а УПЧ — усилитель промежуточной частоты, ЧД — частотный дискриминатор.

Частота колебаний автогенератора подстраивается только в ограниченные промежутки времени, соответствующие длительности модулирующих импульсов. В промежутках между импульсами сигнал на выходе смесителя (СМ) отсутствует, т. е. система автоподстройки оказывается разомкнутой.

Передаточная функция непрерывной части системы (рис. 10.26, б)

$$W_H(p) = k_d k_y W_\Phi(p),$$

где k_d, k_y — коэффициенты передачи дискриминатора и управляющего элемента; $W_\Phi(p)$ — передаточная функция фильтра.

Передаточная функция приведенной непрерывной части системы

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT_\Phi} \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p},$$

где $k = k_d k_y k_\Phi$.

Передаточной функции приведенной непрерывной части соответствует импульсная переходная функция

$$w(t) = k [1(t) - e^{-t/T_\Phi} - 1(t - \gamma T) + e^{-\gamma T/T_\Phi} 1(t - \gamma T)].$$

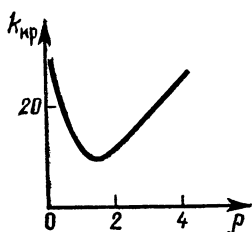


Рис. 10.27. Зависимость критического коэффициента усиления от β

Передаточная функция разомкнутой импульсной системы в соответствии с выражением (10.20)

$$W_p(z) = k \frac{e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta}};$$

$$\beta = \frac{T}{T_\Phi}.$$

Смещенная передаточная функция разомкнутой системы автоподстройки частоты определяется выражением (10.25) или (10.26).

Определим условие устойчивости автоподстройки частоты. Характеристическое уравнение системы в соответствии с (10.70) имеет вид

$$z - e^{-\beta} + k [e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}] = 0.$$

Условие устойчивости системы: $|z_1| = |e^{-\beta} - k[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}]| < 1$.

Критический коэффициент усиления найдем, приравняв последнее выражение минус единице. В результате получим, что

$$k_{кр} = (1 + e^{-\beta}) / (e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}).$$

На рис. 10.27 показана зависимость $k_{кр} = f(\beta)$, рассчитанная при $\gamma = 0,25$. Из рисунка видно, что с уменьшением β критический коэффициент усиления увеличивается и при $\beta = 0$ оказывается равным бесконечности, так как при малых значениях β свойства импульсной системы приближаются к свойствам непрерывной, при $\beta = 0$ эти свойства совпадают. При $\beta > 2$ критический коэффициент усиления также увеличивается, так как свойства замкнутой системы автоподстройки

частоты приближаются к свойствам разомкнутой системы, которая устойчива при любом коэффициенте усиления.

Дискретные значения переходного процесса определим из Z-преобразования для переходной функции системы:

$$H(z) = W_3(z) \frac{z}{z-1} = \frac{k[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}]}{z - e^{-\beta} + k[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}]} \frac{z}{z-1},$$

где $W_3(z)$ — передаточная функция замкнутой импульсной системы, рассчитываемая по (10.33).

При $k=10$, $\beta=0,5$ и $\gamma=0,25$

$$H(z) = \frac{0,8}{z+0,2} \frac{z}{z-1}.$$

Применив формулы (10.46) и (10.47), вычислим переходный процесс в системе автоподстройки частоты по формуле

$$h(nT) = 0,665[1(nT) - (0,2)^n].$$

На рис. 10.28 построен переходный процесс, рассчитанный при заданных параметрах системы.

Статическая ошибка системы автоподстройки частоты, согласно (10.36),

$$e_c = e_0 = \frac{1 - e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta} + k[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}]},$$

где e_0 — начальное значение ошибки.

Если параметры системы автоподстройки частоты принять такими же, как и при определении переходного процесса, то $e_c = 0,335 e_0$.

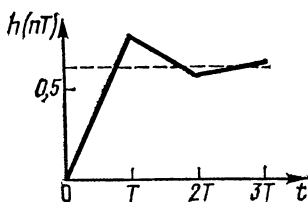


Рис. 10.28. Переходный процесс в импульсной системе РА

§ 10.12. ЦИФРОВЫЕ УСТРОЙСТВА

Помимо аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, цифровых фильтров в цифровых системах используются и цифровые фазовые детекторы, частотные и временные дискриминаторы, синтезаторы частот и др. Эти устройства строятся на логических элементах И, ИЛИ, НЕ, триггерах, счетчиках, регистрах памяти, цифровых фильтрах и др. Рассмотрим некоторые из этих устройств, наиболее широко применяемых в системах РА.

Цифровые фазовые дефекторы (ЦФД) в системах РА предназначены для преобразования фазы и в код. Один из возможных вариантов построения ПФД показан на рис. 10.29, а [19]. Детектор состоит из трех логических

элементов I_1, I_2, I_3 , обозначенных символом $\&$

логического элемента и реверсивного счетчика (РС).

Входной гармонический сигнал с помощью преобразователя (П) преобразуется в двухуровневую меандровую последовательность A со значениями ± 1 , опорное колебание принимает значения 0 и 1 (рис. 10.29, б).

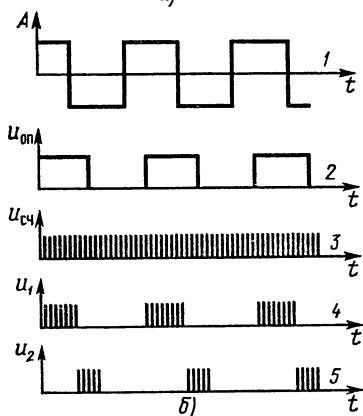
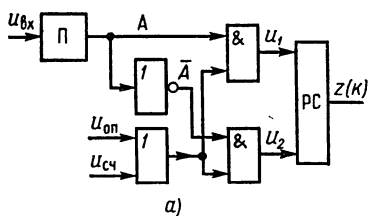


Рис. 10.29. Цифровой фазовый детектор:

а — структурная схема; б — эпюры

Перемножение входного и опорного напряжений, которое осуществляется в аналоговом фазовом детекторе, в ЦФД заменяется перемножением на логических элементах И. С этой целью последовательность A подается на логический элемент I_1 , а инвертированная последовательность A — на логический элемент I_2 . На вторые входы этих логических элементов поступает последовательность импульсов, сформированная схемой I_3 , на вход которой подается опорная последовательность $u_{оп}(t)$ и импульсы с генератора счетных импульсов $u_{сч}(t)$. Число счетных импульсов u_1 и u_2 на выходе логических элементов I_1 и I_2 определяется временем

совпадения опорного сигнала с одним из уровней меандровой последовательности A .

Выходной сигнал ЦФД $z(k)$ образуется в счетно-импульсном коде на выходе реверсивного счетчика, он равен разности числа счетных импульсов на выходах элементов I_1 и I_2 . Таким образом осуществляется преобразование разности фаз входного и опорного сигналов в зависимость $z=f(\varphi)$, форма которой зависит от отношения частот счетных импульсов и опорного сигнала. С ростом этого отношения увеличивается число уровней квантования характеристики $f(\varphi)$ (рис. 10.30, а). При ра-

венстве частот дискриминационная характеристика ЦФД оказывается релейной (рис. 10.30, б) и схема ЦФД упрощается за счет исключения одного элемента И и генератора счетных импульсов. Другие варианты ЦФД описаны в [13, 17].

На рис. 10.31 приведена схема цифрового частотного дискриминатора, принцип работы которого основан на

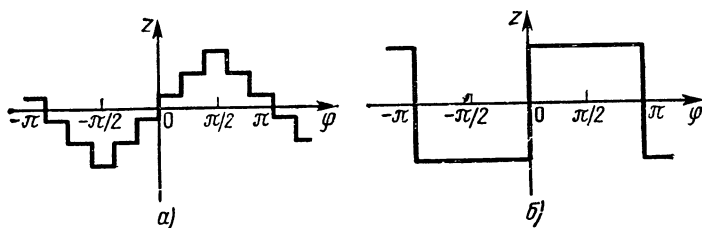


Рис. 10.30. Дискриминационная характеристика цифрового фазового детектора:

а — треугольного типа; б — релейного

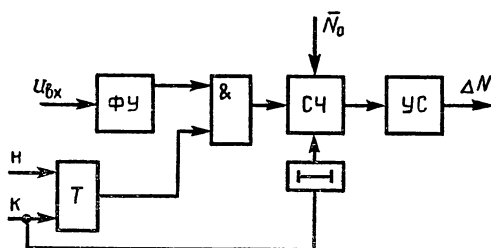


Рис. 10.31. Структурная схема цифрового частотного дискриминатора

подсчете числа пересечений входным сигналом нулевого уровня за определенный интервал времени $T_{и}$. Входной сигнал подается на формирующее устройство (ФУ), в котором преобразуется в последовательность импульсов, возникающих при переходе $u_{вх}(t)$ нулевого уровня, например, при переходе от отрицательных значений к положительным. Импульсы с формирующего устройства (ФУ) поступают на логический элемент И, который открывается триггером (Т) на время $T_{и}$. Управление триггером осуществляется двумя импульсами, один из которых соответствует началу (н), а второй концу (к) интервала измерения $T_{и}$. Импульсы н и к вырабатываются высоко-

стабильным кварцевым генератором. Импульсы с элемента И суммируются счетчиком (СЧ), в котором перед началом счета устанавливается в дополнительном коде число $N_0 = f_0 T_{\text{и}}$, где f_0 — частота, соответствующая переходной частоте ЦЧД. Число импульсов, поступающих от элемента И на счетчик $N = f_c T_{\text{и}}$, где f_c — частота сигнала. Таким образом, в конце интервала измерения в счетчике оказывается записанным число $\Delta N = N - N_0 = \Delta f T_{\text{и}}$, где Δf — частотное рассогласование. Число ΔN считывается устройством считывания (УС), после чего в счетчике снова устанавливается в дополнительном коде число N_0 , т. е. он оказывается подготовленным к следующему циклу работы.

Цена младшего разряда кода сигнала на выходе ЦЧД $\Delta f = 1/T_{\text{и}}$. Действительно, изменение числа N на одну единицу соответствует изменению частоты на Δf , т. е. $N+1 = (f_c + \Delta f) T_{\text{и}}$, поэтому $\Delta N = \Delta f T_{\text{и}}$. При малых значениях интервала измерения $T_{\text{и}}$ значение Δf может оказаться недопустимо большим. Меньшая погрешность частотного рассогласования получается в более сложных ЦЧД, работающих по принципу периодометра [17], согласно которому в дискриминаторе формируется временной интервал, соответствующий m периодам входного сигнала. Этот временной интервал измеряется с помощью счетных импульсов, следующих с частотой $f_{\text{сч}}$. При этом цена младшего разряда $\Delta f = f_0 / f_{\text{сч}} T_{\text{и}}$, т. е. $f_{\text{сч}} / f_0$ раз меньше по сравнению с ранее рассмотренным дискриминатором.

В системах автоподстройки частоты используются частотные дискриминаторы, построенные по аналоговому принципу с двумя расстроенными контурами. Структурная схема такого дискриминатора приведена на рис. 10.32. Входной сигнал, преобразованный в код, поступает на два перестраиваемых цифровых фильтра (ЦФ₁ и ЦФ₂), резонансные частоты которых разнесены. Резонансная частота одного из цифровых фильтров ниже переходной частоты, второго — выше. Передаточные функции фильтров $W_1(z)$ и $W_2(z)$ выбираются так, чтобы обеспечивался крутой спад дискриминационной характеристики за рабочим участком. Квадраторы K_1 и K_2 соответствуют амплитудным детекторам в аналоговом частотном дискриминаторе. В накопителе (Н) осуществляется усреднение чисел, поступающих с устройства вычитания, на интервале времени $T_{\text{и}}$ с последующим его сбросом. Под действием управляющего сигнала u_y происхо-

дит измерение переходной частоты, при этом резонансные частоты цифровых фильтров перестраиваются таким образом, что их разность оставалась постоянной. Если частота входного сигнала равна половине этой разности, т. е. совпадает с переходной частотой, то цифровой сигнал на выходе накопителя равен нулю.

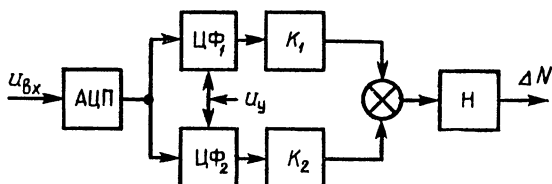


Рис. 10.32. Структурная схема частотного дискриминатора с расстроенными контурами

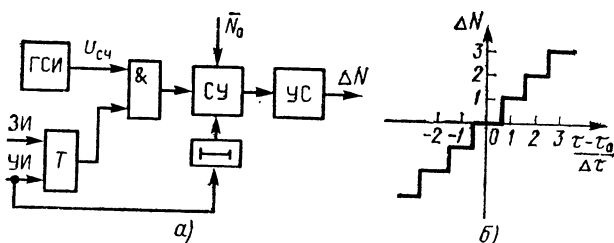


Рис. 10.33. Временной дискриминатор:
а — структурная схема; б — дискриминационная характеристика

Цифровые временные дискриминаторы предназначены для измерения временного рассогласования и преобразования его в двоичное число. На рис. 10.33, а изображена структурная схема временного дискриминатора [17], который используется в системах слежения по дальности РЛС сопровождения. В этом дискриминаторе зондирующий импульс (ЗИ), синхронизированный с излучением зондирующего импульса передатчика, поступает на триггер (Т) и переводит его в состояние, при котором логический элемент И начинает пропускать импульсы с генератора счетных импульсов (ГСИ) на счетчик дискриминатора. Сформированный по отраженному от цели сигналу управляющий импульс (УИ) прекращает поступление счетных импульсов в счетчик. Число импульсов,

прошедших через элемент И в счетчик, $N = \tau / f_{\text{сч}}$, где τ — временной интервал, заполненный счетными импульсами, следуемыми с частотой $f_{\text{сч}}$. Таким образом осуществляется преобразование временного интервала между зондирующим и управляющим импульсами в двоичный код с ценой младшего разряда $\Delta\tau = 1/f_{\text{сч}}$.

Перед началом измерения в счетчик в дополнительном коде записывается число $N_0 = \tau_0 / f_{\text{сч}}$, где τ_0 — опорное

значение временного интервала. После прихода управляющего импульса в счетчике остается число $\Delta N = N - N_0$, которое является выходным цифровым сигналом временного дискриминатора. Устройство считывания (УС) по задержанному на некоторое время управляющему импульсу обеспечивает считывание из счетчика числа ΔN , при этом положительные числа выдаются в прямом коде, а отрицательные — в дополнительном. После считывания происходит сброс показаний счетчика и ввод числа N_0 для следующего цикла измерения.

Рассмотренный вариант дискриминатора имеет пропорциональную характеристику (рис. 10.33, б), шаг квантования измеряемого интервала времени равен периоду следования счетных импульсов $T_{\text{сч}}$.

На рис. 10.34, а приведена схема временного дискриминатора, принцип работы которого аналогичен аналоговому дискриминатору, описанному в

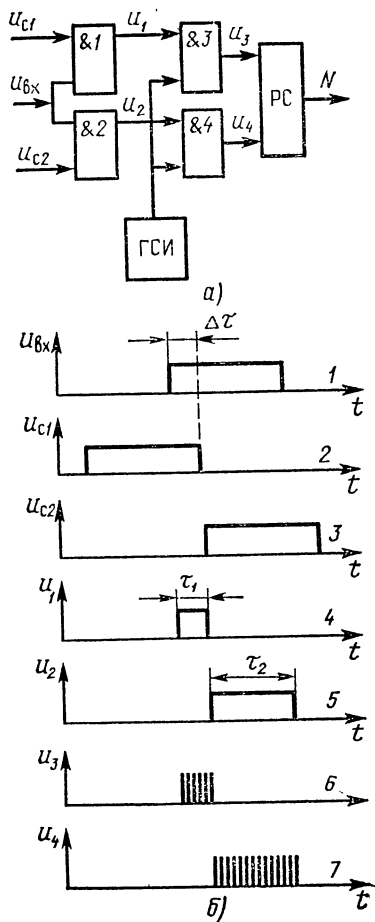


Рис. 10.34. Временной дискриминатор:

а — структурная схема; б — эпюры

§. 1.6. Как видно из рисунка, этот дискриминатор состоит из логических элементов И, генератора счетных импульсов и реверсивного счетчика (РС). На рис. 10.34, б показаны графики, поясняющие работу этого дискриминатора. Входной сигнал $u_{вх}(t)$ подается на логические элементы И₁ и И₂, на которые также поступают следящие импульсы $u_{с1}$ и $u_{с2}$. На выходе этих элементов формируются два импульса длительностями τ_1 и τ_2 , которые открывают элементы И₃ и И₄ для прохождения счетных импульсов. Число прошедших импульсов зависит от длительности импульсов τ_1 и τ_2 и равно соответственно N_1 и N_2 . В реверсивном счетчике фиксируется разность этих чисел импульсов $N = N_2 - N_1$. Число N считывается, после чего в счетчике устанавливается нуль и начинается следующий цикл измерения.

Если счетные импульсы синхронизированы со следящими импульсами, то дискриминационная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 10.35. Шаг кванто-

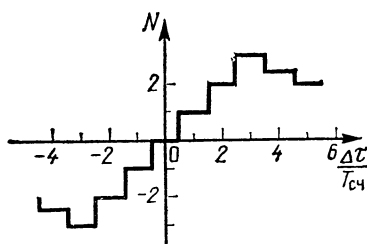


Рис. 10.35. Дискриминационная характеристика временного дискриминатора

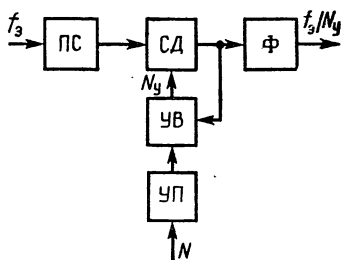


Рис. 10.36. Структурная схема разомкнутого синтезатора частот

вания преобразуемой величины Δt определяется периодом повторения счетных импульсов $T_{сч}$.

Цифровые синтезаторы частот предназначены для формирования колебаний с частотами $f_r = f_0 + N\Delta f$, где f_0 — центральная частота; Δf — дискретность отсчета частоты; N — управляющее число. На рис. 10.36 показана схема разомкнутого синтезатора [17], построенного на счетчике-делителе. Преобразователь сигнала (ПС) из синусоидальных колебаний с частотой формирует последовательность импульсов той же частоты с нулевой фазой относительно входных колебаний.

В счетчике-делителе (СД), который является обычным двоичным счетчиком, в дополнительном коде записывается управляющее число N_y , его ввод осуществляется устройством ввода (УВ). При поступлении на вход СД N_y входных импульсов происходит его переполнение ($N_y + N_y = 0$), в результате чего в счетчик записывается нуль, а на его выходе появляется импульс переполнения,

под действием которого в счетчик снова записывается число \bar{N}_y . Таким образом, частота следования импульсов переполнения на выходе счетчика оказывается в N_y раз меньше эталонной частоты. Импульсы переполнения с СД подаются в гармонические колебания. Для получения линейной зависимости частоты синтезатора от управляющего числа N в его состав включено устройство пересчета (УП), которое число N преобразует в N_y по формуле $N_y = f_z(f_0 + N\Delta f)$. В общем случае число N_y является дробным и округляется при вводе в счетчик, в результате чего возникают искажения линейной зависимости частоты синтезатора от управляющего числа. Наличие схем пересчета и возникновение ошибки из-за округления

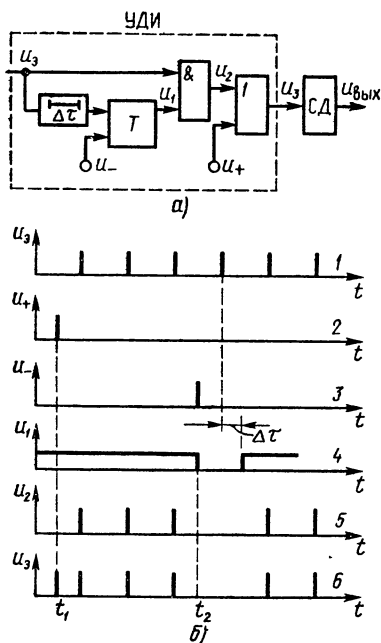


Рис. 10.37. Цифровой фазовращатель:

а — структурная схема; б — эпюры

управляющего числа являются основными недостатками рассмотренного синтезатора частот.

В цифровых системах ФАПЧ при небольшом диапазоне изменения частоты входного сигнала применяются цифровые управляемые фазовращатели (рис. 10.37, а), состоящие из устройства добавления и исключения (УДИ) и счетчика-делителя [19]. Логический элемент И открывается высоким напряжением с триггера (Т),

в результате чего импульсы эталонной последовательности проходят на выход элемента И (рис. 10.37, б). Если в какой-то момент времени появляется управляющий импульс (добавление) u_+ , то с помощью логического элемента ИЛИ он добавляется к импульсу эталонной последовательности. Для надежности работы добавление осуществляется между импульсами эталонной последовательности.

Управляющий импульс (исключение) u_- , возникающий в момент времени t_2 , переводит триггер в нулевое состояние, поэтому элемент И закрывается и последующий импульс не проходит на выход УДИ. Через время Δt на втором входе триггера появляется импульс, который переводит его в исходное состояние, в результате чего последовательность эталонных импульсов поступает снова на выход УДИ. Для нормальной работы необходимо, чтобы выполнялось условие $\tau_0 < \Delta t < 0,5/f_0$, где τ_0 — длительность импульса эталонной последовательности.

Добавление или исключение одного импульса соответствует сдвигу фазы эталонной последовательности на $\pm 360^\circ$. Такой дискрет фазы является слишком большим, поэтому в состав фазовращателя включается счетчик-делитель, на выходе которого фаза сигнала относительно эталонной последовательности будет $\pm 360^\circ/n_d$, где n_d — коэффициент деления. Сдвиги фаз, вносимые управляющими импульсами, накапливаются на выходе СД, т. е. осуществляется интегрирование управляющих импульсов.

§ 10.13. ЦИФРОВАЯ СИСТЕМА АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Функциональная схема цифровой системы автоподстройки частоты показана на рис. 10.38 (более детальная по сравнению с рис. 10.4). В состав системы входит цифровой фазовый детектор (ЦФД), на один из входов которого поступает последовательность импульсов u_0 с частотой f_0 , сформированная формирующим устройством ФУ₁ по сигналу с эталонного генератора (ЭГ). На два других входа ЦФД с цифрового перестраиваемого генератора (ЦПГ) подаются две меандровые последовательности импульсов I_+ и I_- , сдвинутые одна относительно другой на π . В зависимости от того, с какой из этих последовательностей совпадает временное положение импульсов с ЭГ в ЦФД вырабатывается сигнал ошибки, начало ко-

торого совпадает с временным положением импульса с ЭГ, а окончание с концом импульса меандровой последовательности. Сигнал ошибки заполняется счетными импульсами последовательности $u_{сч}$ с частотой $f_{сч}$. Число счетных импульсов в сигнале ошибки зависит от рассогласования фаз сигналов на входе ЦФД. В зависимости

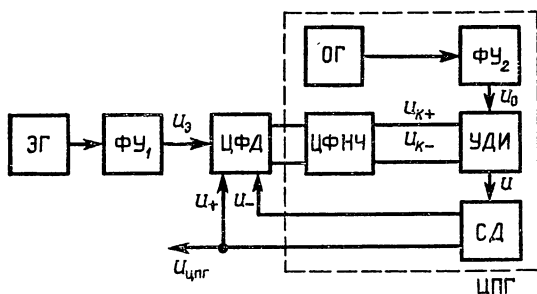


Рис. 10.38. Функциональная схема цифровой ФАПЧ

от соотношения частот f_0 и $f_{сч}$ число импульсов на выходе ЦФД может быть различным. Если $f_{сч} = f_0$, то дискриминационная характеристика ЦФД будет релейной, если $f_{сч} > f_0$, то многоуровневой (см. рис. 10.30).

Сигнал с ЦФД сначала подается на цифровой фильтр нижних частот (ЦФНЧ), а затем на цифровой перестраиваемый генератор, который состоит из УДИ, СД и опорного генератора (ОГ). На вход УДИ подаются импульсы коррекции $u_{к+}$ и $u_{к-}$, а также последовательность импульсов u_0 от ОГ с частотой f_0 . При поступлении импульсов коррекции $u_{к+}$ ($u_{к-}$) в последовательность добавляются (или исключаются) импульсы коррекции, что приводит к изменению фазы сигналов последовательности u_0 на $\pm 360^\circ/n_d$, где n_d — коэффициент деления СД.

Импульсы коррекции поступают на управляющие входы УДИ периодически, поэтому частота сигнала на выходе делителя изменяется.

На рис. 10.39 приведены графики, поясняющие принцип работы замкнутой ФАПЧ при начальной расстройке ($f_{пг} \neq f_0$). Для упрощения графики изображены для случая, когда ЦФНЧ отсутствует, т. е. сигнал с ЦФД подается непосредственно на УДИ. Как видно из рис. 10.39,

первые два импульса от ЭГ совпадают с последовательностью u_+ , в результате чего на положительном выходе ЦФД появляется импульс коррекции, что приводит к добавлению импульса в опорную последовательность u_0 . Момент появления третьего импульса от ЭГ совпадает с меандровой последовательностью u_- , в результате чего импульс коррекции генерируется на отрицательном выходе ЦФД. Под действием этого импульса из опорной последовательности u_0 исключается один импульс. Добавление импульса коррекции приводит к уменьшению периода меандровой последовательности, а исключение — к его увеличению. Таким образом, через какой-то промежуток времени в системе ЦФАП устанавливается режим, при котором средняя частота колебаний сигнала с ЦПГ равна частоте сигнала ЭГ. Отметим, что в непрерывных системах ФАП в установившемся режиме при равенстве частот сигналов от эталонного и перестраиваемого генераторов равны и их мгновенные значения.

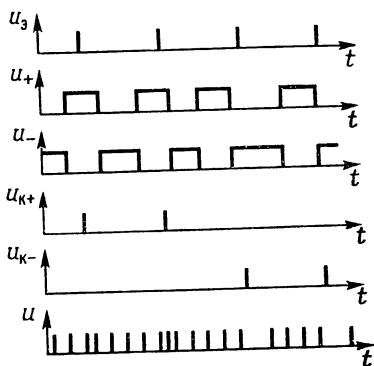


Рис. 10.39. К пояснению принципа работы цифровой ФАПЧ

Оценим основные показатели качества работы системы ЦФАП. С этой целью найдем передаточные функции системы и ее элементов.

В результате добавления (исключения) импульсов коррекции в опорную последовательность среднее значение частоты ЦПГ изменяется и становится равным $f_{\text{пг}} = 1/(n_d + r)$, где r — число импульсов коррекции за один такт работы системы. Таким образом, приращение частоты ЦПГ

$$\Delta f = \frac{1}{T_0(n_d + r)} - \frac{1}{T_0 n_d} = \frac{r}{T_0 n_d(n_d + r)}.$$

Ограничимся случаем, когда $n_d \gg r$. При этом $\Delta f(nT) = r/(T_0 n_d)$ и $T_0 n_d \approx T$. Изменение частоты приво-

дит к приращению фазы сигнала ЦПГ на

$$\Delta\varphi(nT) = 2\pi \frac{Tr(nT)}{T_0 n_d^2} = \frac{2\pi}{n_d} r(nT).$$

За n интервалов работы системы фаза сигнала ЦПГ

$$\varphi_{\text{цпг}}(nT) = \frac{2\pi}{n_d} \sum_{m=0}^{n-1} r(mT).$$

Z-преобразование последнего выражения позволяет получить

$$\varphi_{\text{цпг}}(z) = \frac{2\pi}{n_d} \frac{1}{z-1} r(z),$$

отсюда передаточная функция ЦПГ

$$W_{\text{цпг}}(z) = \frac{k_{\text{цпг}}}{z-1},$$

где $k_{\text{цпг}} = 2\pi/n_d$.

При большом числе уровней дискриминационную характеристику ЦФД можно приближенно заменить линейной зависимостью и записать в виде

$$u_d = k_d \Delta\varphi, \quad (10.90)$$

где $k_d = 1/\Delta u_d$; Δu_d — шаг квантования.

Влияние квантования на качество работы можно учесть, как это делалось ранее, путем дополнительного сигнала — шума квантования (10.1).

При малом числе уровней квантования замена нелинейной характеристики ЦФД линейной (10.90) неточна. Однако если система ЦФАП работает в условиях действия помех, то нелинейная дискриминационная характеристика ЦФД может быть заменена линейной, крутизна которой определяется методом статистической линеаризации (см. гл. 12). При этом передаточную функцию ЦФД можно представить в виде $W_d(z) = k_d$.

Оценим устойчивость системы ЦФАП для случая, когда передаточная функция цифрового фильтра нижних частот

$$W_\Phi(z) = 1 + \frac{k_1}{z-1}. \quad (10.91)$$

Фильтр с передаточной функцией (10.91) позволяет обеспечить астатизм второго порядка, а также необходимый уровень фильтрации помех.

На рис. 10.40 приведена структурная схема ФАПЧ, согласно которой передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(z) = k_d k_{\text{цпг}} \frac{z - 1 + k_1}{(z - 1)^2}.$$

В соответствии с критерием устойчивости Гурвица система ЦФАП устойчива, если выполняется условие $1 > k_1 > 2 - 4|k_d k_{\text{цпг}}|$. Коэффициент передаточной функции

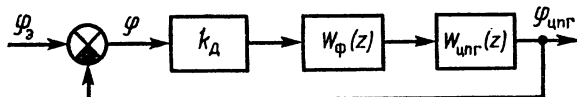


Рис. 10.40. Структурная схема цифровой ФАПЧ

ЦФНЧ k_1 выбирается из условия получения нужного характера переходного процесса в виде частотной характеристики системы ЦФАП. При $k_1 > k_d k_{\text{цпг}}/4$ полюсы системы — комплексно-сопряженные, поэтому переходный процесс имеет колебательный характер и относительно ошибки в соответствии с (10.46) имеет вид

$$\varphi(nT) = \frac{|\lambda|^n}{\beta} [|\lambda| \sin \theta(n+1) - \sin \theta n],$$

где $|\lambda|$, $\theta = \arctg \beta/\alpha$ — модуль и аргумент комплексно-сопряженных полюсов системы; α , β — действительная и мнимая части полюсов системы.

На рис. 10.41 показан график переходного процесса в системе ЦФАП, а на рис. 10.42 — частотная характери-

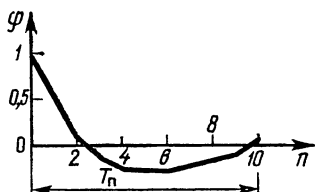


Рис. 10.41. Переходный процесс в системе ЦФАП

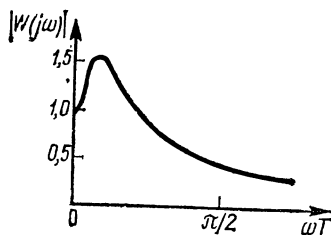


Рис. 10.42. Частотная характеристика цифровой ФАПЧ

стика этой системы, вычислительная при $k_1=0,25$ и $k_{\text{дпт}}=0,5$.

Дискриминационная характеристика ЦФД имеет периодический характер, поэтому так же, как и в непрерывных системах, для систем ЦФАП существует значение начальной расстройки частоты ЦПГ относительно частоты ЭГ, при которой возможен режим слежения частоты ЦПГ за частотой ЭГ. Максимально допустимое значение расстройки частоты называют полосой удержания: $\omega_{\text{уд}}=2\pi u_{\text{дм}}/(n_d T)$.

§ 10.14. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МИКРОПРОЦЕССОРНЫХ СРЕДСТВ В СИСТЕМАХ РА

Создание микропроцессорных средств (МПС) открыло новые возможности для совершенствования систем РА, реализации в них более сложных алгоритмов управления. Внедрение МПС в РЭА различного назначения определяется в основном их быстродействием и функциональными возможностями. В настоящее время МПС применяются в системах радиосвязи, различных устройствах цифровой обработки сигналов, радиолокационных, оптимальных и адаптивных системах РА. По мере совершенствования и нарастания функциональных возможностей МПС области их применения расширяются.

Микропроцессор (МП) — устройство, состоящее из одной или нескольких больших интегральных схем (БИС), выполняющих функции аналогичные процессору ЭВМ. Совместно с БИС оперативного (ОЗУ), постоянного (ПЗУ) и перепрограммируемого (ППЗУ) запоминающих устройств и другими устройствами на БИС микропроцессор образует микропроцессорный комплект (МПК), на основе которого строят вычислительные устройства различного назначения. Различают два вида вычислительных устройств с использованием МПС: вычислители с устройствами управления, выполненными на комбинационных схемах, и вычислители с программными запоминающими устройствами. Микропроцессоры первого вида называют *МП с фиксированным набором команд*. В таких МП достигается максимальное быстродействие. Устройство управления МП второго вида реализуется программным способом, согласно которому любую операцию представляют в виде микроопераций, выполняемых за один такт работы арифметического устройства. Совокупность микроопераций образует микрокоманду, которая

представляет двоичное число, содержащее код операции, а также коды адресов исходных данных и конечного результата. Устройства, предназначенные для хранения и считывания микрокоманд, реализуются на БИС ПЗУ и ППЗУ. Изменение выполнения операций ведет к смене микропрограммы, что позволяет применять один и тот же тип микропроцессорного комплекта (МПК) для построения различных вычислительных устройств.

Для считывания каждой команды требуется обращение к ПЗУ, поэтому быстроедействие МП с микропрограммным управлением ниже быстрогодействия МП с фиксированным набором команд.

Элементы МП (операционные устройства, управляемая память и др.) могут размещаться в одной микросхеме. Так построены отечественные МПК серий КР580 и КР1810. Использование таких МП упрощает построение вычислительных устройств, облегчает их программирование, однако сопровождается значительным сокращением их быстрогодействия.

Для повышения быстрогодействия и универсальности МПС выполняются по модульному принципу, в соответствии с которым микропроцессорное устройство выполняется из функциональных модулей. Модульный принцип построения МПС позволяет за счет выбора необходимых модулей создавать микропроцессорные устройства различного назначения.

МПС отличается от остальных изделий вычислительной техники тем, что они реализуются на одной или нескольких БИС. При современном развитии технологии максимальная площадь кристалла БИС не превышает 50 мм². Такая небольшая площадь приводит к тому, что для построения микропроцессорных устройств приходится использовать несколько БИС, поэтому современные МПК состоят из нескольких десятков БИС различного назначения. Разрядность микропроцессорных БИС обычно равна 4, 8 и реже 16, необходимая разрядность микропроцессорных устройств реализуется за счет объединения нескольких БИС. Микропроцессорные БИС с ограниченным числом разрядов называют *секционными*. Подобные МП БИС являются основной элементной базой микропроцессорных устройств, применяемых в РЭА и системах РА. В секционных МП управляющее устройство строится по принципу микропрограммного управления, что позволяет составлять микропрограммы с учетом специфики решаемых алгоритмов.

На рис. 10.43 показана структурная схема микропроцессорного устройства, в котором данные с устройств ввода обрабатываются в МП и результаты выдаются на устройства вывода. Ввод данных осуществляется устройствами ввода—вывода (УВВ). Кроме МП и УВВ в сос-

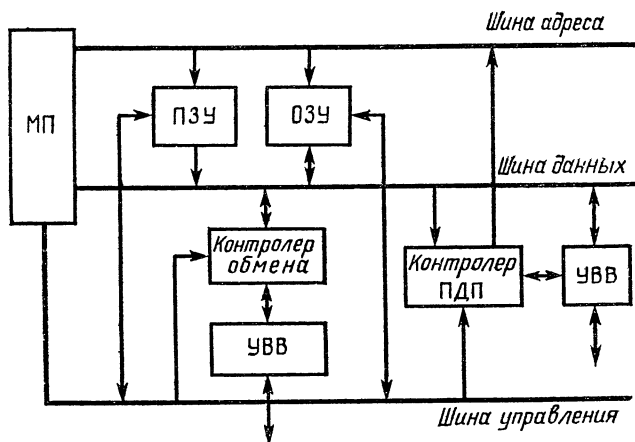


Рис. 10.43. Структурная схема МПУ

тав микропроцессорного устройства входят следующие устройства: ОЗУ и ПЗУ, предназначенные для хранения и выдачи по запросам команд программы различных данных; контроллеры, обеспечивающие обмен данными между УВВ с МП и устройствами памяти. Информационный поток в микропроцессорном устройстве поступает на шины данных, адресов и управления.

В процессе работы МП выдает на шину адреса код ячейки памяти, в которой хранится очередная команда, обеспечивая ее считывание под действием сигналов с шины управления. Запрошенные команды через шину данных поступают в МП, где расшифровываются, после чего МП приступает к их выполнению. После выполнения текущей команды на шину адреса выдается адрес следующей команды и процесс повторяется.

Устройства УВВ подключаются к шине данных через контроллер, который управляет процессом обмена данных. Различают следующие способы обмена данными: программно-управляемый, с прерыванием и прямым доступом к блоку памяти. В первый способ моменты обмена

данными известны заранее, поэтому на этапе программирования в соответствующих местах программы располагаются команды, обеспечивающие обмен.

При втором способе моменты обмена определяются УВВ. В этом случае УВВ подает сигнал в МП и переводит его в режим прерывания, в котором МП прекращает выполнение основной программы и начинает осуществлять программу прерывания, обеспечивающую обмен данными. После выполнения обмена данными МП возвращается к выполнению основной программы.

Описанные два способа обмена связаны с потерями процессорного времени. От этого недостатка свободен третий способ обмена — прямой доступ к блоку памяти (ПДП). Организация такого обмена осуществляется контроллером ПДП, которому микропроцессор передает управление шинами для непосредственного обмена данными между блоком памяти и УВВ. После окончания обмена данными контроллер ПДП передает управление шинами МП, связь которого с шинами восстанавливается и выполнение программы продолжается.

Для описания различных МПК БИС используются следующие основные характеристики [18]:

1) число специализированных БИС в комплекте, определяющее функциональные возможности комплекта при минимальном использовании микросхем малой и средней интеграции;

2) число шин, которое обычно не превышает трех (с уменьшением числа шин быстродействие БИС снижается);

3) число регистров общего назначения, характеризующее емкость сверхоперативной памяти (их число — 2—16). С увеличением числа регистров уменьшается число обращений к запоминающим устройствам, в результате чего повышается быстродействие выполнения микропрограммы;

4) число уровней прерывания, определяет число внешних устройств, с которыми может обмениваться данными МП;

5) число буферных регистров ввода—вывода, увеличение которого приводит к уменьшению длительности выполнения микрокоманды, упрощает микропроцессорное устройство.

В настоящее время промышленностью освоен выпуск различных МПК. Для использования в РЭА и системах РА наибольший интерес представляют МПК серий

Таблица 10.2

Серия	Число микросхем в комп- лекте	Обозначение ЦПЭ*	Разряд- ность, бит	Тактовая частота, МГц	Напряже- ние пита- ния, В
K588	8	KP588BC2	16	10	5
K1800	9	K1800BC1	4	16	—5,2; —2
KP1802	12	KP1802BC1	8	10	5
KM1804	18	KP1804BC1	4	10	5

* ЦПЭ — центральный процессорный элемент [11].

K588, K1800, KP1802 и KM1804 (табл. 10.2). МПК, приведенные в табл. 10.2, являются секционными, поэтому при создании микропроцессорных устройств имеется возможность наращивания разрядности.

При проектировании систем РА, в которых применяются МПК БИС, приходится решать следующие задачи: разработку алгоритмов, реализуемых с помощью МПС;

выбор типа МПК;

составление и отладка программы.

Разработка алгоритмов выполняется в соответствии с методами синтеза систем РА, рассмотренными ранее. В дальнейшем процесс синтеза разбивается на синтез аппаратных средств и программную часть. Для выполнения этих работ, как и при выборе типа МПК, инженер должен быть знаком с элементной базой микропроцессорных устройств, системой команд программного обеспечения, средствами отладки и т. п.

На основании требований к реализации алгоритмов и характеристик МПК разрабатывается структура микропроцессорного устройства с выделением аппаратурной и программной частей, дальнейшей разработкой и отладкой программ.

Нахождение рационального сочетания этих средств и является конечной целью проектирования систем РА с МПС. Обычно основанием для выбора типа МПК является его быстроедействие.

Структурная схема системы РА с микропроцессорным устройством приведена на рис. 10.1. Задачи, которые решаются в таких системах микропроцессорным устройством разнообразны. Они могут быть связаны с формированием корректирующих программ для улучшения

динамических свойств системы (в этом случае микропроцессорное устройство является по существу цифровым фильтром) или реализации алгоритмов оптимальных и адаптивных систем. Кроме того, микропроцессорное устройство может осуществлять вычисление сигнала рассогласования в замкнутых системах, так как в ряде систем, например в РЛС с антенными фазированными решетками, для определения этого сигнала требуется выполнить большой объем вычислений.

В качестве примера рассмотрим микропроцессорное устройство, предназначенное для управления лучом фазированной антенной решетки (ФАР) бортовой РЛС [18], которая состоит из $NМ$ антенных элементов (N — элементов в каждой строке решетки). Фаза сигнала каждого элемента решетки

$$\varphi_{ij} = \left[\frac{sd}{\lambda} (i \cos \alpha + j \cos \beta) \right] \bmod s, \quad (10.92)$$

где $s = 2\pi/(\Delta\varphi)$ — число состояний фазовращателя; $\Delta\varphi$ — дискрет фазы; d — расстояние между антенными элементами; l — длина волны; $\bmod s$ — символ операции взятия целой части числа по модулю; $\cos \alpha$, $\cos \beta$ — направляющие косинусы, определяющие положение в пространстве луча антенной решетки.

Алгоритм управления лучом целесообразно составить так: сначала по данным целеуказания нужно вычислять значения направляющих косинусов $sd \cos \alpha / \lambda$ и $sd \cos \beta / \lambda$, а затем по полученным данным и формуле (10.92) определить значения фаз каждого элемента решетки φ_{ij} . Расчет фаз по (10.92) сводится к многократному выполнению операций сложения, число которых равно $n_{сд} = NM$. Последовательное вычисление φ_{ij}

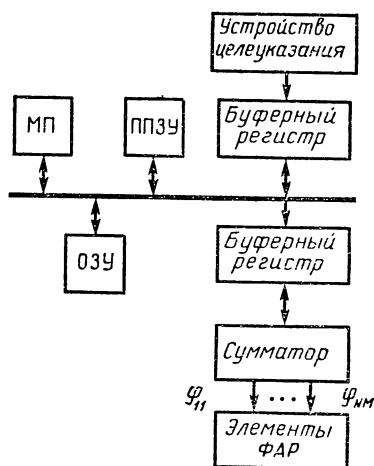


Рис. 10.44. Структурная схема МПУ управления угловым положением радиолокационного луча

всех элементов приводит к большим затратам времени, поэтому целесообразно операцию суммирования выполнять с использованием аппаратного сумматора.

Структурная схема микропроцессорного устройства для управления ФАР приведена на рис. 10.44. Данные с целеуказания через буферный регистр поступают в ОЗУ. МП в соответствии с программой, помещенной в ППЗУ, вычисляет значения направляющих косинусов, которые через буферный регистр поступают на сумматор, вычисляющий значения фазы каждого элемента ФАР φ_{ij} . Определенные значения фаз хранятся в регистрах и по сигналу считывания поступают на фазовращатели ФАР.

В заключение отметим, что основным фактором сдерживающим в настоящее время применение МПС в системах РА является их невысокое быстродействие по сравнению с цифровыми устройствами. Поэтому их используют пока в отдельных элементах систем РА (цифровых фильтрах, дискриминаторах, АЦП и т. п.).

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 10

1. Определить математическую модель процесса квантования сигнала по времени.
 2. Что такое Z -преобразование сигнала?
 3. Пояснить методы определения передаточных функций импульсного фильтра цифровой системы РА.
 4. Какими способами определяются переходные процессы в цифровых системах РА?
 5. Укажите методы вычисления статической и динамической ошибок в цифровых системах.
 6. Каковы особенности передаточных функций статических и астатических систем?
 7. Каким образом определяются частотные характеристики цифровых систем относительно псевдочастоты?
 8. Сформулируйте условия устойчивости цифровых систем РА.
 9. Каков порядок синтеза цифровых систем? Перечислите методы определения передаточных функций корректирующих устройств.
 10. Укажите виды структурных схем цифровых фильтров. Каковы основные источники их погрешностей?
 11. Поясните принцип работы цифрового фазового детектора, цифрового фазовращателя, цифровой системы автоподстройки частоты.
-

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

§ 11.1. ВЕКТОРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Современная теория дискретных систем РА, так же как и непрерывных, базируется на описании процессов в пространстве состояний. Познакомимся с методами математического описания в пространстве состояний систем РА с одним входом и одним выходом.

Рассмотрим системы, дискретные передаточные функции которых имеют вид

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_0}, \quad (11.1)$$

где $x(t)$ — входной сигнал; $y(t)$ — выходной сигнал.

Передаточной функции (11.1) соответствует разностное уравнение

$$\begin{aligned} y(n+l) + a_{l-1} y(n+l-1) + \dots + a_0 y(n) = \\ = c_m x(n+m) + c_{m-1} x(n+m-1) + \dots + c_0 x(n). \end{aligned} \quad (11.2)$$

В аргументах выражения (11.2) для сокращения записи множитель T опущен, также будем поступать и дальше.

Введем обозначение

$$y(n) = g_1(n) + h_0 x(n) \quad (11.3)$$

и составим следующую систему из разностных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} g_1(n+1) &= g_2(n) + h_1 x(n); \\ g_2(n+1) &= g_3(n) + h_2 x(n); \\ &\dots \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$g_l(n+1) = -a_0 g_1(n) - a_1 g_2(n) - \dots - a_{l-1} g_l(n) + h_l x(n).$$

Неизвестные коэффициенты h_i в системе уравнений (11.4) определяют из условия эквивалентности системы разностных уравнений (11.4) исходному разностному уравнению (11.2) и вычисляют последовательно по формулам:

$$h_0 = c_i;$$

$$\begin{aligned}h_1 &= c_{l-1} - a_{l-1} h_0; \\h_2 &= c_{l-2} - a_{l-2} h_0 - a_{l-1} h_1; \\&\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{11.5}$$

Уравнения (11.3) и (11.4) перепишем в матричной форме:

$$\mathbf{G}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{G}(n) + \mathbf{B}x(n);\tag{11.6}$$

$$y(n) = \mathbf{C}^T \mathbf{G}(n) + h_0 x(n),\tag{11.7}$$

где

$$\mathbf{G}(n) = \begin{bmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \vdots \\ g_l(n) \end{bmatrix}$$

— вектор переменных состояния размером $l \times 1$;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, \dots, & 0 \\ \dots\dots\dots \\ -a_0, & -a_1, & -a_2, \dots, & -a_{l-1} \end{bmatrix}$$

— матрица системы размером $l \times l$;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_l \end{bmatrix}$$

— матрица управления размером $l \times 1$;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

— матрица наблюдения размером $l \times 1$; \mathbf{C}^T — транспонированная матрица наблюдения; l — порядок системы.

Выражение (11.6) называют *векторным разностным уравнением системы*, а выражение (11.7) — *уравнением выхода*.

Для пояснения физического смысла введенных переменных состояния на рис. 11.1, а изображена структурная схема, составленная по уравнениям (11.6) и (11.7),

которая отличается от схемы непрерывной системы (см. рис. 8.1) тем, что в схеме цифровой системы вместо векторного интегратора введен вектор запаздывания. На рис. 11.1, б показана структурная схема, в которой изображены все составляющие вектора состояния. Из этой

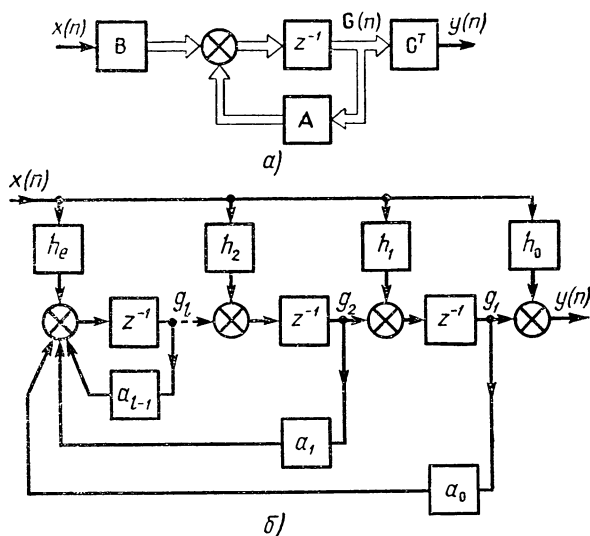


Рис. 11.1. Структурная схема цифровой системы:
а — в векторной форме; б — в переменных состояния

схемы видно, что переменные состояния — это дискретные значения сигнала в текущий момент времени и $l-1$ его значения в предыдущие моменты времени.

Аналогично непрерывным системам составляющие вектора переменных состояний $g_i(n)$ можно рассматривать как оси координат многомерного пространства состояния системы. С течением времени вектор состояния изменяет свое значение и положение, его конец описывает в пространстве состояния некоторую кривую, называемую *траекторией движения системы*. Очевидно, что эта траектория зависит от начального состояния и входного сигнала.

Матрица системы **A** определяет устойчивость и другие показатели качества работы системы, матрица управления **B** характеризует влияние на переменные состояния входного сигнала, а матрица наблюдения **C** устанавлива-

ет связь выходного сигнала системы с вектором переменных состояния.

Так же как и в непрерывных, выбор переменных состояния в цифровых системах является неоднозначной операцией, т. е. векторное разностное уравнение зависит от выбранных переменных состояния. Однако все возможные векторные уравнения эквивалентны, так как описывают один и тот же динамический процесс связи выходного сигнала системы с входным. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 11.1. Найти векторное разностное уравнение для системы, дискретная передаточная функция которой

$$W(z) = \frac{z - 1}{z^2 - 0,75z + 0,125}.$$

Решение. Данной передаточной функции соответствует разностное уравнение

$$y(n+2) - 0,75y(n+1) + 0,125y(n) = x(n+1) - x(n).$$

На основании выражений (11.4), (11.7) получим, что

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ -0,125, & +0,75 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 \\ -0,25 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнения системы в пространстве состояний получаются следующими:

$$g_1(n+1) = g_2(n) + x(n); \quad (11.8)$$

$$g_2(n+1) = -0,125g_1(n) + 0,75g_2(n) - 0,25x(n),$$

а уравнение выхода имеет вид

$$y(n) = g_1(n). \quad (11.9)$$

На рис. 11.2, а изображена структурная схема рассматриваемой системы, построенная по уравнениям (11.8) и (11.9), из которой видно, что переменные состояния — это сигналы на выходах звеньев запаздывания.

Представим передаточную функцию системы в виде

$$W(z) = \frac{3}{z - 0,25} - \frac{2}{z - 0,5}.$$

Такой передаточной функции соответствует структурная схема, приведенная на рис. 11.2, б. Выберем в качестве переменных состояния сигналы на выходах звеньев запаздывания. Тогда можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(n+1) &= 0,25f_1(n) + 3x(n); \\ f_2(n+1) &= 0,5f_2(n) - 2x(n). \end{aligned} \quad (11.10)$$

В этом случае уравнение выхода имеет вид

$$y(n) = f_1(n) + f_2(n). \quad (11.11)$$

Перепишем выражения (11.10) и (11.11) в матричной форме:

$$\mathbf{F}(n+1) = \mathbf{A}_F \mathbf{F}(n) + \mathbf{B}_F x(n);$$

$$y(n) = \mathbf{C}_F^T \mathbf{F}(n),$$

где $\mathbf{F}(n) = \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$ — вектор переменных состояния;

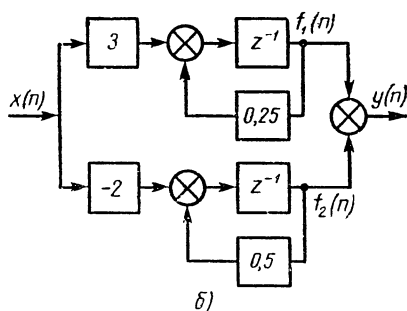
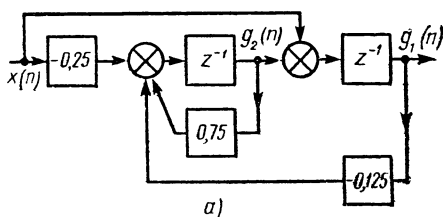


Рис. 11.2. Схемы системы второго порядка:

a — относительно дискрет выходного сигнала;
б — относительно полюсов системы

$$\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (11.8) и (11.10), (11.9) и (11.11) следует, что различным переменным состояния соответствуют различные матрицы системы, управления и наблюдения, но связь выходного сигнала системы с входным остается неизменной:

$$y(n) = \mathbf{C}^T \mathbf{G}(n) = \mathbf{C}_F^T \mathbf{F}(n).$$

Ранее цифровые системы РА в пространстве состояний описаны для стационарных систем. В нестационарных системах матрицы системы управления и наблюдения являются переменными, и векторные разностные

уравнения имеют такой вид

$$\mathbf{G}(n+1) = \mathbf{A}(n) \mathbf{G}(n) + \mathbf{B}(n) x(n); \quad (11.12)$$

$$y(n) = \mathbf{C}^T(n) \mathbf{G}(n) + h_0(n) x(n). \quad (11.13)$$

В общем случае цифровая система имеет r входов и m выходов. При этом вид векторных разностных уравнений остается таким же, как и в (11.12) и (11.13), в которых матрица системы \mathbf{A} имеет тот же вид, что и в системах с одним входом и одним выходом, изменяются лишь матрицы управления и наблюдения. Матрица управления становится прямоугольной размером $l \times r$, а матрица наблюдения имеет размер $l \times m$.

§ 11.2. ДИСКРЕТНАЯ МАТРИЦА ПЕРЕХОДА

Рассмотрим однородное нестационарное уравнение, которое получается из разностного векторного уравнения (11.12) при $x(n) = 0$:

$$\mathbf{G}(n+1) = \mathbf{A}(n) \mathbf{G}(n). \quad (11.14)$$

Обозначим через $\mathbf{G}(0)$ начальное состояние системы. Тогда из выражения (11.14) последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(1) &= \mathbf{A}(0) \mathbf{G}(0); \\ \mathbf{G}(2) &= \mathbf{A}(1) \mathbf{G}(1) = \mathbf{A}(1) \mathbf{A}(0) \mathbf{G}(0); \end{aligned} \quad (11.15)$$

.....

$$\mathbf{G}(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}(i) \mathbf{G}(0).$$

Введем дискретную матрицу перехода с помощью соотношения:

$$\mathbf{G}(n) = \Phi(n, m) \mathbf{G}(m).$$

Дискретная матрица перехода $\Phi(n, m)$ обладает следующими свойствами:

$$\Phi(n, n) = \mathbf{I}; \quad \Phi(n, m) = [\Phi(m, n)]^{-1},$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Соотношения (11.15) через введенную дискретную матрицу перехода записывают в виде

$$\mathbf{G}(n) = \Phi(n, 0) \mathbf{G}(0).$$

Тогда матрица перехода имеет вид

$$\Phi(n, 0) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}(i). \quad (11.16)$$

Для стационарных систем

$$\Phi(n, 0) = \Phi(n) = A^n.$$

Полное решение векторного разностного уравнения (11.12) найдем путем следующих последовательных вычислений:

$$\begin{aligned} G(1) &= A(0)G(0) + B(0)X(0); \\ G(2) &= A(1)G(1) + B(1)X(1) = A(1)A(0)G(0) + \\ &\quad + A(1)B(0)X(0) + B(1)X(1); \\ &\dots \end{aligned}$$

$$G(n) = \prod_{i=0}^{n-1} A(i)G(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} A(j) \right] B(i)X(i),$$

или, учитывая введенную дискретную матрицу перехода,

$$G(n) = \Phi(n)G(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(n-i-1)B(i)X(i). \quad (11.17)$$

В аналого-цифровых системах РА, где имеется непрерывная часть, дискретную матрицу перехода можно определить путем дискретизации непрерывных уравнений (8.8) и (8.9), описывающих процессы, происходящие в системе. Положим, что входной сигнал непрерывной системы $X(t)$ может быть принят постоянным между дискретными моментами времени, чего можно достичь соответствующим выбором периода дискретизации. Рассмотрим интервал времени $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, на котором вектор переменных состояния известен. Тогда из уравнения (8.24) следует, что

$$Z(t_{n+1}) = \Phi(t_{n+1}, t_n)Z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)B(\tau)X(\tau)d\tau. \quad (11.18)$$

Введем следующие обозначения:

$$Z(t_n) = G(n), Z(t_{n+1}) = G(n+1); \quad (11.19)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t_{n+1}, t_n) &= \Phi(n+1, n); \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)B(\tau)d\tau = \\ &= \Gamma(n+1, n). \end{aligned}$$

Уравнение (11.18) можно записать в виде

$$G(n+1) = \Phi(n+1, n)G(n) + \Gamma(n+1, n)X(n), \quad (11.20)$$

где $\Gamma(n+1, n)$ — матрица перехода по управлению.

Уравнение (11.20) совместно с уравнением выхода (11.13) используется и для анализа процессов в непрерывных системах РА с помощью ЦВМ.

Для стационарных систем дискретная матрица перехода может быть найдена с помощью Z -преобразования, которое следует применить к уравнению (11.6). В результате получим

$$zG(z) = AG(z) + V(z) + zG(0),$$

где $V(z) = BX(z)$; $G(0)$ — начальное состояние системы.

Согласно последнему выражению,

$$G(z) = [zI - A]^{-1} V(z) + [zI - A]^{-1} zG(0). \quad (11.21)$$

Обратное Z -преобразование от уравнения (11.21), осуществленное с учетом теоремы (10.11), позволяет определить

$$G(n) = \sum_{m=0}^n \Phi(n-1-m) V(m) + \Phi(n) G(0),$$

или

$$G(n+1) = \sum_{m=0}^n \Phi(n-m) V(m) + \Phi(n+1) G(0), \quad (11.22)$$

где $\Phi(n) = Z^{-1}\{[zI - A]^{-1}z\}$.

Матрицу $[zI - A]$ называют *характеристической*, определитель этой матрицы является характеристическим уравнением системы.

Пример 11.2. Найти дискретную матрицу перехода для системы, рассмотренной в примере 11.1.

Решение. Система описывается разностными уравнениями (11.8), ее характеристическая матрица имеет вид

$$zI - A = \begin{bmatrix} z, & -1 \\ 0,125, & z-0,75 \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная характеристической (см. приложение П.4),

$$\frac{1}{(z-0,5)(z-0,25)} \begin{bmatrix} z-0,75, & 1 \\ -0,125, & z \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме о вычетах (10.46), дискретная матрица перехода

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} 2(0,25)^n - (0,5)^n, & -4(0,25)^n + 4(0,5)^n \\ 0,5(0,25)^n - 0,5(0,5)^n, & -(0,25)^n + 2(0,5)^n \end{bmatrix}.$$

§ 11.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО ФИЛЬТРА

Современные методы расчета оптимальных фильтров основываются на том, что случайные сигналы генерируются из белого шума с помощью формирующих фильтров. Для стационарных случайных сигналов может быть найдена дискретная передаточная функция формирующего фильтра. Для этого необходимо спектральную плотность дискретного случайного сигнала представить в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций:

$$S(v) = NW_{\Phi}(jv)W_{\Phi}(-jv),$$

где $W_{\Phi}(jv)$ — частотная характеристика формирующего фильтра относительно псевдочастоты; N — интенсивность белого шума на входе формирующего фильтра.

Для математического описания сигнала при решении оптимальных задач используется передаточная функция формирующего фильтра в виде Z -преобразования

$$W_{\Phi}(z) = W_{\Phi}(jv) \Big|_{jv = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (11.23)$$

Передаточная функция (11.23) определяет векторное разностное уравнение формирующего фильтра.

Решение оптимальной задачи заключается в определении оценки вектора переменных состояния формирующего фильтра сигнала и ошибки оценки

$$E(n/j) = G(n) - \hat{G}(n/j). \quad (11.24)$$

Следовательно, $G(n/j)$ и $E(n/j)$ определяются в дискретные моменты времени $t=nT$ на основании их j предыдущих значений. Различают три случая:

- 1) если $n > j$, то задачу оценки называют предсказанием;
- 2) если $n = j$, то задачу оценки называют задачей фильтрации;
- 3) если $n < j$, то задачу оценки считают задачей интерполяции.

В дальнейшем рассматривается задача фильтрации. После предварительных замечаний, сформулируем задачу синтеза оптимальных фильтров (рис. 11.3).

Полагаем, что случайный дискретный сигнал $X(n)$ является результатом прохождения белого шума через формирующий фильтр, векторное разностное уравнение

которого имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(n+1) &= \Phi(n+1, n) \mathbf{G}(n) + \mathbf{B}(n+1) \mathbf{V}(n); \\ \mathbf{X}(n+1) &= \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{G}(n+1),\end{aligned}\quad (11.25)$$

где $\mathbf{G}(n)$ — вектор переменных состояния сигнала; $\Phi(n+1, n)$ — дискретная матрица перехода; $\mathbf{B}(n+1)$ — матрица управления; $\mathbf{C}^T(n+1)$ — транспонированная матрица наблюдения.

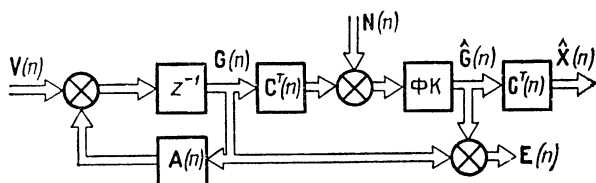


Рис. 11.3. К постановке задачи дискретного фильтра Калмана

Гауссовская случайная последовательность $\mathbf{V}(n)$ имеет характеристики

$$M[\mathbf{V}(n)] = 0; \quad M[\mathbf{V}(n) \mathbf{V}^T(j)] = \mathbf{Q}(n) \delta_{nj}, \quad (11.26)$$

где $\mathbf{Q}(n)$ — матрица интенсивностей белых шумов на входе формирующего фильтра вектора сигнала;

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = j; \\ 0 & \text{при } n \neq j, \end{cases}$$

M означает взятие математического ожидания от выражения, заключенного в квадратные скобки.

Начальное состояние вектора переменных состояния $\mathbf{G}(0)$ характеризуется гауссовским распределением с характеристиками

$$M[\mathbf{G}(0)] = 0, \quad M[\mathbf{G}(0) \mathbf{G}^T(0)] = \mathbf{R}_E(0). \quad (11.27)$$

Измеряемый сигнал (воздействие на входе синтезируемого фильтра)

$$\mathbf{F}(n) = \mathbf{C}^T(n) \mathbf{G}(n) + \mathbf{N}(n), \quad (11.28)$$

где $\mathbf{N}(n)$ — вектор помех с характеристиками. При этом

$$M[\mathbf{N}(n)] = 0; \quad M[\mathbf{N}(n) \mathbf{N}^T(j)] = \mathbf{P}(n) \delta_{nj}, \quad (11.29)$$

где $\mathbf{P}(n)$ — матрица интенсивностей белых шумов вектора помех.

Случайные последовательности $\mathbf{v}(n)$ и $\mathbf{N}(n)$ полагаем некоррелированными.

Задача синтеза состоит в том, чтобы найти векторное разностное уравнение фильтра, обеспечивающего по измеренным значениям сигнала (11.28) $\mathbf{F}(1), \mathbf{F}(2), \dots, \mathbf{F}(n)$ оптимальную текущую оценку вектора переменных состояния сигнала с минимальной дисперсией ошибки:

$$M[\mathbf{E}^T(n)\mathbf{E}(n)] = \min, \quad (11.30)$$

где $\mathbf{E}(n) = \mathbf{G}(n) - \hat{\mathbf{G}}(n/n)$ — вектор ошибки; $\hat{\mathbf{G}}(n/n)$ — оценка вектора переменных состояния сигнала.

§ 11.4. ДИСКРЕТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

Найдем векторное разностное уравнение оптимального фильтра Калмана. По определению оценка вектора переменных состояния сигнала определяется выражением [10]

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) = M[\mathbf{G}(n+1)/\mathbf{F}(1), \mathbf{F}(2), \dots, \mathbf{F}(n+1)]. \quad (11.31)$$

Введем с помощью соотношения

$$\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) = \mathbf{F}(n+1) - M[\mathbf{F}(n+1)/\mathbf{F}(1), \dots, \mathbf{F}(n)] \quad (11.32)$$

невязку измеряемого сигнала (11.28). Принимая во внимание, что математическое ожидание $\mathbf{F}(j)$ равно нулю, выражение (11.31) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) &= M[\mathbf{G}(n+1)/\mathbf{F}(1), \mathbf{F}(2), \dots, \mathbf{F}(n)] + \\ &+ M[\mathbf{G}(n+1)/\mathbf{F}(n+1/n)] = \mathbf{G}(n+1/n) + \\ &+ M[\mathbf{G}(n+1)/\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)]. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Так как $\mathbf{G}(n+1)$ и $\mathbf{F}(n+1/n)$ — гауссовские последовательности с нулевыми математическими ожиданиями, то второе слагаемое в выражении (11.33) можно записать так:

$$M[\mathbf{G}(n+1)/\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)] = \mathbf{R}_{G\tilde{\mathbf{F}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n), \quad (11.34)$$

где $\mathbf{R}_{G\tilde{\mathbf{F}}} = M[\mathbf{G}(n+1)\tilde{\mathbf{F}}^T(n+1/n)]$, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} = M[\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)\tilde{\mathbf{F}}^T(n+1/n)]$ — матрицы корреляционных моментов.

Введем матрицу усиления

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{F}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}}^{-1}. \quad (11.35)$$

Учитывая, что

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) = \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n),$$

выражение (11.33) представим в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) = \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n) + \mathbf{K}(n+1) \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) \quad (11.36)$$

Первое слагаемое в этом выражении определяет оценку в момент времени $t = (n+1)T$ по результатам n измерений, второе уточняет эту оценку по последнему измерению.

Измеряемый сигнал характеризуется выражением (11.28). Невязка этого сигнала (11.32) некоррелирована с вектором помехи $\mathbf{N}(n)$, поэтому выражение (11.32) можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) &= \mathbf{F}(n+1) - \mathbf{C}^T(n+1) \hat{\mathbf{G}}(n+1/n) = \\ &= \mathbf{F}(n+1) - \mathbf{C}^T(n+1) \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n). \end{aligned} \quad (11.37)$$

Подставив (11.37) в уравнение (11.36), найдем, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) &= \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n) + \mathbf{K}(n+1) [\mathbf{F}(n+1) - \\ &- \mathbf{C}^T(n+1) \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n)]. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Выражение (11.38) является векторным разностным уравнением оптимального фильтра, в соответствии с которым на рис. 11.4 построена структурная схема фильтра. Из этой схемы видно, что найденный оптимальный фильтр — это система с обратной связью, внутренним контуром которой является формирующий фильтр сигнала, а параметры обратной связи определяются матрицей усиления. Найдем эту матрицу. Для этого подставим в выражение (11.37) вектор (11.28). В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) &= \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{G}(n+1) + \mathbf{N}(n+1) - \mathbf{C}^T(n+1) \times \\ &\times \mathbf{G}(n+1/n) = \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1), \end{aligned} \quad (11.39)$$

где $\mathbf{E}(n+1/n) = \mathbf{G}(n+1) - \hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$ — вектор ошибки.

Рассмотрим второй сомножитель матрицы усиления (11.35). С учетом выражения (11.39)

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} = M[\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)] = M\{[\mathbf{C}^T(n+1)\mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)][\mathbf{C}^T(n+1)\mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)]^T\}.$$

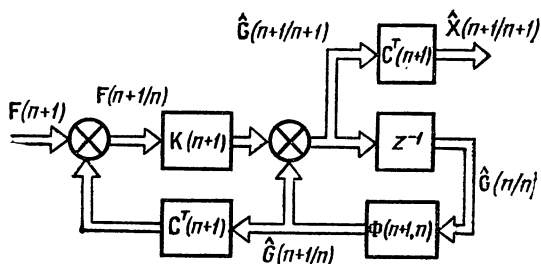


Рис. 11.4. Структурная схема оптимального фильтра

После выполнения операций умножения получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} &= \mathbf{C}^T(n+1)\mathbf{R}_E(n+1/n)\mathbf{C}(n+1) + \mathbf{C}^T(n+1)M[\mathbf{E}(n+1/n)\mathbf{N}^T(n+1)] + M[\mathbf{N}(n+1)] \times \\ &\quad \times \mathbf{E}^T(n+1/n) + \mathbf{P}(n+1), \end{aligned} \quad (11.40)$$

где $\mathbf{R}_E(n+1/n) = M[\mathbf{E}(n+1/n)\mathbf{E}^T(n+1/n)]$ — матрица корреляционных моментов ошибки; $\mathbf{P}(n+1)$ — матрица интенсивности вектора помехи.

Второе и третье слагаемое в (11.40) равны нулю. Действительно, принимая во внимание вектор ошибки, из уравнения (11.39) можно записать, что

$$\begin{aligned} M[\mathbf{E}(n+1/n)\mathbf{N}^T(n+1)] &= M\{[\mathbf{G}(n+1) - \hat{\mathbf{G}}(n+1/n)]\mathbf{N}^T(n+1)\} = M[\mathbf{G}(n+1)\mathbf{N}^T(n+1) - \\ &\quad - M[\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)\mathbf{N}^T(n+1)]]. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Вектор переменных состояния и вектор помех некоррелированы между собой, поэтому первое слагаемое в (11.41) равно нулю.

Оценку $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$ с учетом выражения (11.16) представим в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) = \prod_{i=0}^n \mathbf{A}(i)\mathbf{G}(n/n), \quad (11.42)$$

где $\mathbf{A}(i)$ — матрица формирующего фильтра сигнала.

Так как начальное состояние оценки вектора переменных состояния сигнала равно нулю, то выражение (11.42) также равно нулю. Поэтому второе слагаемое в (11.41) равно нулю и матрица корреляционных моментов (11.40) получается следующей:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} = \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{R}_E(n+1/n) \mathbf{C}(n+1) + \mathbf{P}(n+1). \quad (11.43)$$

Рассмотрим первый сомножитель матрицы усиления (11.35). Согласно (11.39),

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{F}}} = M \{ [\mathbf{E}(n+1/n) + \hat{\mathbf{G}}(n+1/n)] [\mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)]^T \}.$$

Раскрыв в этом выражении скобки, найдем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{F}}} = & M [\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{E}^T(n+1/n)] \mathbf{C}(n+1) + \\ & + M [\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) \mathbf{E}^T(n+1/n)] \mathbf{C}(n+1) + M [\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)] + \\ & + M [\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)]. \end{aligned}$$

Так как оценка вектора переменных состояния не зависит от $\mathbf{E}(n+1/n)$ при любых n , то второе и третье слагаемые в последнем выражении равны нулю. В соответствии с (11.41) оказывается равным нулю и четвертое слагаемое, поэтому

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{F}}} = \mathbf{R}_E(1+1/n) \mathbf{C}(n+1). \quad (11.44)$$

Подставив выражения (11.43) и (11.44) в матрицу усиления (11.35), получим

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{R}_E(n+1/n) \mathbf{C}(n+1) [\mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{R}_E(n+1/n) \mathbf{C}(n+1) + \mathbf{P}(n+1)]^{-1}. \quad (11.45)$$

Матрица корреляционных моментов ошибки в (11.45) с учетом того, что $\mathbf{E}(n+1/n)$ и $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$ не зависят друг от друга, определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E(n+1/n) = & \Phi(n+1, n) \mathbf{R}_E(n/n) \Phi^T(n+1, n) + \\ & + \mathbf{B}(n+1) \mathbf{Q}(n) \mathbf{B}^T(n+1). \end{aligned} \quad (11.46)$$

Таким образом, матрица усиления оптимального фильтра определена. Найдем выражение для вектора ошибки фильтрации:

$$\mathbf{E}(n+1/n+1) = \mathbf{G}(n+1) - \mathbf{G}(n+1/n+1). \quad (11.47)$$

Подставив в (11.47) оценку вектора переменных состояния (11.36), получим

$$\mathbf{E}(n+1/n+1) = \mathbf{G}(n+1) - [\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) + \mathbf{K}(n+1)\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)]$$

или, учтя уравнение (11.39),

$$\mathbf{E}(n+1/n+1) = \mathbf{E}(n+1/n) - \mathbf{K}(n+1)[\mathbf{C}^T(n+1) + \mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)] = [\mathbf{I} + \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}^T(n+1) + \mathbf{E}(n+1/n) - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{N}(n+1)], \quad (11.48)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Матрица корреляционных моментов ошибки по определению имеет вид

$$\mathbf{R}_E(n+1/n+1) = M[\mathbf{E}(n+1/n+1)\mathbf{E}^T(n+1/n+1)].$$

Подставив в это выражение уравнение (11.48) с учетом

$$M[\mathbf{E}(n+1/n)\mathbf{N}^T(n+1)] = M[\mathbf{N}(n+1)\mathbf{E}^T(n+1/n)] = 0,$$

определим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E(n+1/n+1) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}^T(n+1)]\mathbf{R}_E(n+1/n) \\ &\quad + \mathbf{K}(n+1)\mathbf{P}(n+1) \\ &\quad + \mathbf{K}(n+1)\mathbf{K}^T(n+1). \end{aligned} \quad (11.49)$$

Согласно (11.45),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1)[\mathbf{C}^T(n+1)\mathbf{R}_E(n+1/n)\mathbf{C}(n+1) + \mathbf{P}(n+1)] &= \\ = \mathbf{R}(n+1/n)\mathbf{C}(n+1). \end{aligned} \quad (11.50)$$

Выполнив умножение матриц в выражении (11.49) с учетом (11.50), получим окончательное выражение для матрицы корреляционных моментов ошибки:

$$\mathbf{R}_E(n+1/n+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}^T(n+1)]\mathbf{R}_E(n+1/n). \quad (11.51)$$

Сумма элементов главной диагонали матрицы (11.51) определяет дисперсию суммарной ошибки оптимального фильтра, которая при заданных характеристиках сигнала и помехи и найденном уравнении фильтра имеет минимальное значение.

Особенностью оптимального фильтра Калмана является рекуррентная форма его уравнений, поэтому для обработки результатов измерений целесообразно использо-

вать цифровые вычислительные устройства. Последовательность вычислений на одном цикле следующая (см. рис. 11.4):

- 1) найденная на предыдущем цикле оценка $\hat{\mathbf{G}}(n/n)$ умножается слева на матрицу перехода $\Phi(n+1, n)$, в результате чего определяется $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$;
- 2) оценка $\mathbf{G}(n+1/n)$ умножается слева на $\mathbf{C}^T(n+1)$ и по формуле (11.37) вычисляется невязка $\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)$;
- 3) $\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)$ умножается на матрицу усиления и результат суммируется с оценкой $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$, после чего находится оценка $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$.

Далее цикл вычислений повторяется. На каждом цикле рассчитываются также матрицы корреляционных моментов $\mathbf{R}_E(n+1/n)$ и $\mathbf{R}_E(n+1/n+1)$.

При расчете матрицы усиления (11.45) определяют обратную матрицу размером $m \times m$, что обычно не связано с большими трудностями, так как число выходов фильтра m редко превышает значение, равное 2—3.

При стационарных воздействиях в установившемся режиме матрицы усиления и корреляционных моментов ошибки являются стационарными и могут быть найдены из уравнений (11.45), (11.46) и (11.51).

При реализации оптимальных фильтров на цифровых устройствах из-за ограниченного числа их разрядов вычисления выполняются с погрешностями. Наибольшие погрешности получаются при расчете матрицы, корреляционных моментов ошибки, причем с каждым последующим циклом объем вычислений увеличивается и качество оценок сигнала ухудшается. В теории оптимальных фильтров это явление называют *неустойчивостью фильтров Калмана*.

Пример 11.3. Найти уравнение оптимального фильтра первого порядка, на вход которого воздействует помеха в виде белого шума с интенсивностью P и случайный стационарный сигнал, генерируемый формирующим фильтром, разностное уравнение которого имеет вид $g_1(n+1) = dg_1(n) + v(n)$.

Решение. Из последнего разностного уравнения следует, что $\mathbf{A}=d$, $\mathbf{B}=1$, $\mathbf{C}=1$. Выражения (11.45), (11.46) и (11.51) в рассматриваемом примере являются скалярными:

$$\begin{aligned} K(n+1) &= R_E(n+1/n) [R_E(n+1/n) + P]^{-1}; \\ R_E(n+1/n) &= d^2 R_E(n/n) + Q; \\ R_E(n+1/n) &= [1 - K(n+1)] R_E(n+1/n). \end{aligned} \quad (11.52)$$

Из этих уравнений находим, что

$$K(n+1) = [d^2 R_E(n/n) + Q] [d^2 R_E(n/n) + Q + P]^{-1};$$

$$R_E(n+1/n+1) = K(n+1)P.$$

Уравнение оптимального фильтра в соответствии с выражением (11.38) имеет вид

$$\hat{g}_1(n+1/n+1) = d\hat{g}_1(n/n) + K(n+1)[F(n+1) - d\hat{g}_1(n/n)].$$

Оценка сигнала вычисляется в такой последовательности. По начальному значению $R_E(0)$ определяется коэффициент усиления $K(1)$ и дисперсия $R_E(1/1)$, а затем находится значение оценки сигнала $\hat{g}_1(1/1)$, после чего цикл вычислений повторяется. В табл. 11.1 приведены результаты расчета нескольких циклов для случая $d=1$; $P=0,8$; $Q=2$; $R_E(0)=10$.

Т а б л и ц а 11.1

n	$K(n+1)$	$R_E(n+1/n+1)$
0	0,9375	0,7500
1	0,7746	0,6197
2	0,7760	0,6129
3	0,7656	0,6125
...
∞	0,7655	0,6124

Значения дисперсии оценки сигнала и коэффициента усиления, указанные в табл. 11.1 для установившегося режима, определены следующим образом. В этом режиме $R_E(n+1/n+1) = R_E(n/n) = R_E$, поэтому уравнения (11.52), решенные относительно ошибки фильтрации, позволяют получить следующее квадратное уравнение $R_E^2 + QR_E - QP = 0$, решение которого $R_{E=1,2} = -1 \pm 1,6124$. Так как дисперсия — величина положительная, то ошибка фильтрации $R_E = 0,6124$, что дает возможность вычислить коэффициент усиления оптимального фильтра. Уравнение для оценки сигнала в установившемся режиме имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(n+1/n+1) &= \hat{g}_1(n/n) + 0,7655[E(n+1) - \hat{g}_1(n/n)] = \\ &= 0,2345 - \hat{g}_1(n/n) + 0,7655F(n+1). \end{aligned}$$

Осуществив Z -преобразование последнего разностного уравнения, найдем дискретную передаточную функцию оптимального фильтра:

$$W_\Phi(z) = \frac{0,7655z}{z - 0,2345}.$$

§ 11.5. НЕПРЕРЫВНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

Определим непрерывный оптимальный фильтр на основе дискретного фильтра, рассмотренного в § 11.4. Первоначально рассмотрим методику перехода к непрерывной модели векторного дифференциального уравнения от разностного уравнения (11.20). С этой целью заменим аргументы в уравнении (11.20) n на t и $n+1$ на $t+\Delta t$ и разложим матрицу перехода в ряд Тейлора по степеням

Δt , ограничившись первыми степенями Δt . В результате получим, что

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \Phi(t, t) + \dot{\Phi}(t, t) \Delta t. \quad (11.53)$$

Так как $\Phi(t, t) = I$, $\dot{\Phi}(t, t) = A(t)$, то выражение (11.53) принимает вид

$$\Phi(t + \Delta t, t) = I + A(t) \Delta t. \quad (11.54)$$

Аналогично, для матрицы перехода по управлению (11.19)

$$\Gamma(t + \Delta t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t + \Delta t, \tau) B(\tau) d\tau = B(t) \Delta t. \quad (11.55)$$

Подставив уравнения (11.54) и (11.55) в выражение (11.20), найдем

$$G(t + \Delta t) = [I + A(t) \Delta t] G(t) + B(t) V(t) \Delta t.$$

Перенеся $G(t)$ из правой части в левую и перейдя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим

$$\dot{G}(t) = A(t) G(t) + B(t) V(t). \quad (11.56)$$

Аналогичным образом для уравнения выхода

$$X(t) = C^T(t) G(t). \quad (11.57)$$

Если применить рассмотренную методику предельного перехода от дискретной модели к непрерывной для векторного разностного уравнения оптимального дискретного фильтра (11.38), то непрерывный оптимальный фильтр будет описывать следующим векторным дифференциальным уравнением с начальными условиями:

$$\hat{\dot{G}}(t) = A(t) \hat{G}(t) + K(t) [F(t) - C^T(t) \hat{G}(t)]. \quad (11.58)$$

Уравнению (11.58) соответствует структурная схема, показанная на рис. 11.5, из которой видно, что оптимальный фильтр — это нестационарная система с обратной связью, внутренним контуром которой является формирующий фильтр сигнала.

Матрица усиления в (11.58) находится из разностного уравнения (11.45) и имеет вид

$$K(t) = R_E(t) C(t) P^{-1}(t), \quad (11.59)$$

где $P(t)$ — матрица интенсивностей белого шума вектора помехи.

Матрица корреляционных моментов ошибки вектора $\hat{\mathbf{E}}(t/t) = \mathbf{G}(t) - \hat{\mathbf{G}}(t/t)$ в выражении (11.59) удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{R}}_E(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{R}_E(t) + \mathbf{R}_E(t) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{R}_E(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \mathbf{C}^T(t) \times \\ \times \mathbf{R}_E(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}^T(t) \quad (11.60)$$

с начальными условиями $\mathbf{R}_E(0) = \mathbf{R}_{E0}$.

Выражение (11.60) в теории оптимальных систем называют *уравнением Риккати*. Это нелинейное уравнение,

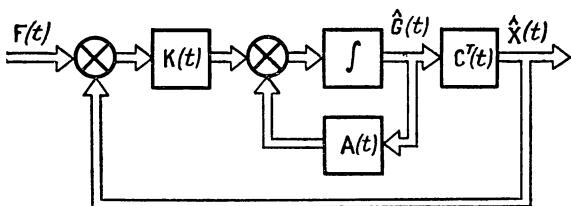


Рис. 11.5. Структурная схема оптимального непрерывного фильтра

которое в общем виде не решается. Поэтому вычисление элементов матрицы корреляционных моментов ошибки фильтрации сводится к решению системы из дифференциальных уравнений первого порядка, которая получается путем приравнивания в уравнении (11.60) элементов матрицы слева соответствующим элементам матрицы справа. Так как матрица $\mathbf{R}_E(t)$ симметричная, то число уравнений равно $0,5n(n+1)$, где n — порядок формирующего фильтра. Из найденных решений следует отобрать только то, при котором матрица $\mathbf{R}_E(t)$ положительно определена (см. приложение П. 4), такое решение является единственным.

В установившемся режиме $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}$, $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$, $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}_E(t) = \mathbf{R}_E$, поэтому $\dot{\mathbf{R}}_E = 0$ и уравнения (11.58), (11.59) и (11.60) принимают такой вид:

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K}[\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}^T\hat{\mathbf{G}}(t)]; \quad (11.61)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_E \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1}; \quad (11.62)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \mathbf{R}_E + \mathbf{R}_E \mathbf{A}^T - \mathbf{R}_E \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}_E + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T. \quad (11.63)$$

Уравнение (11.63) в общем виде также не решается, поэтому элементы матрицы R_E определяются из решения системы алгебраических уравнений, получаемых из (11.63) после выполнения умножения и сложения матриц в правой части уравнения (11.63). Из найденных решений необходимо отобрать только то решение, при котором матрица R_E положительно определена.

Отметим, что передаточная функция оптимального фильтра, соответствующая уравнениям (11.61) и (11.62), совпадает с передаточной функцией, получаемой при синтезе оптимального фильтра по методу Винера.

Найденный оптимальный фильтр может быть использован для проектирования оптимальной системы РА. Если проектируемая система является счетно-решающим устройством, то при технической реализации могут быть применены однотипные интеграторы и сумматоры, используемые в вычислительной технике. Если проектируемая система предназначена для управления динамическим объектом, то реализация оптимальной системы сводится к определению структуры и параметров корректируемого устройства, подключение которого к объекту управления позволяет получить оптимальную систему. При стационарных сигнале и помехе реализация оптимальной системы упрощается. В этом случае матрицы в уравнениях (11.58) и (11.59) не зависят от времени, поэтому можно найти передаточные функции оптимальной системы и затем, используя методику гл. 7, определить передаточные функции корректирующих устройств, которые в данном случае будут стационарными.

Заметим, что ранее оптимальные решения найдены для случая, когда случайная составляющая сигнала равна нулю. В противном случае оптимальный фильтр дает смещенную оценку сигнала, т. е. случайная составляющая оценки сигнала не будет равна соответствующей составляющей сигнала. Если необходимо, чтобы случайные составляющие оценки и сигнала были равны, то следует использовать оптимальный фильтр для несмещенной оценки*.

Пример 11.4. Определить из условия минимума среднеквадратической ошибки в установившемся режиме структурную схему и параметры оптимальной системы, на которую действует смесь сигна-

* См.: Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975.

ла и помехи со спектральными плотностями $S_x(\omega) = \frac{N_x}{1 + \omega^2 T_x^2}$;

$S_n(\omega) = N_n$.

Решение. Передаточная функция формирующего фильтра сигнала — это инерционное звено с постоянной времени T_x и коэффициентом усиления, равным единице. Такой передаточной функции формирующего фильтра соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 v(t),$$

где $a_0 = b_0 = 1/T_x$.

В пространстве состояний последнее уравнение имеет вид

$$\dot{g}_1(t) = -a_0 g_1(t) + b_0 v(t);$$

$$g_1(t) = x(t).$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче $A = -a_0$; $B = 1$; $C = 1$; $P = N_n$; $Q = b_0^2 N_x$.

В установившемся режиме из уравнения (11.61) следует, что оценка сигнала $\hat{g}(t) = -a_0 \hat{g}_1(t) + k[f(t) - \hat{g}_1(t)]$.

Для вычисления коэффициента усиления оптимальной системы необходимо найти дисперсию ошибки фильтрации, для чего нужно решить уравнение (11.63), которое в данном примере следующее: $R_F + 2a_0 N_n R_E - b_0^2 N_x N_n = 0$.

Согласно последнему квадратному уравнению, дисперсия ошибки фильтрации

$$R_E = \sqrt{a_0^2 N_n^2 + b_0^2 N_x N_n} - a_0 N_n = (\sqrt{\rho + 1} - 1) N_n / T_x,$$

где $\rho = N_x / N_n$.

Коэффициент усиления рассчитаем по формуле (11.62): $k = \frac{1}{T_x} (\sqrt{1 + \rho})$.

На рис. 11.6 показана структурная схема оптимальной системы. Передаточная функция системы

$$W_0(p) = \frac{k_0}{1 + pT_0},$$

где $k_0 = 1 - 1/\sqrt{1 + \rho}$; $T_0 = T_x/\sqrt{1 + \rho}$.

Полученная передаточная функция оптимальной системы совпадает с передаточной функцией, найденной по методу Винера в примере 9.2.

Пример 11.5. Спектральные плотности сигнала и помехи характеризуются выражениями $S_x(\omega) = k_n^2 N_x / \omega^4$; $S_n(\omega) = N_n$. Определить структурную схему и параметры оптимальной системы.

Решение. Формирующий фильтр состоит из двух интегрирующих звеньев, соединенных последовательно. Такому фильтру соответствует дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) = k_n v(t),$$

где $v(t)$ — белый шум интенсивностью N_x .

Уравнения фильтра в пространстве состояний:

$$\dot{g}_1(t) = g_2(t);$$

$$\dot{g}_2(t) = k_{\Pi} v(t).$$

Уравнение выхода фильтра: $g_1(t) = x(t)$. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = N_{\Pi}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\Pi}^2 N_x \end{bmatrix}$$

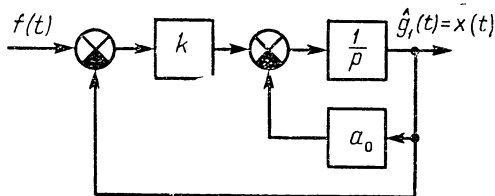


Рис. 11.6. Структурная схема оптимальной системы РА

Ограничимся рассмотрением установившегося режима, уравнение Риккати в котором определяется (11.63) и для данного примера имеет такой вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{N_{\Pi}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\Pi}^2 N_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из последнего выражения получим следующую систему алгебраических уравнений с неизвестными элементами матрицы корреляционных моментов ошибки:

$$\begin{aligned} 2R_{12} - \frac{R_{11}^2}{N_{\Pi}} &= 0; \\ R_{22} - \frac{R_{11} R_{12}}{N_{\Pi}} &= 0; \\ -\frac{R_{21} R_{11}}{N_{\Pi}} + R_{22} &= 0; \\ -\frac{R_{12} R_{21}}{N_{\Pi}} + k_{\Pi}^2 N_x &= 0. \end{aligned}$$

Матрица \mathbf{R}_E симметричная, поэтому $R_{12} = R_{21}$ и решение системы алгебраических уравнений будет следующим:

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{k_{\Pi}^2 N_{\Pi}^3 N_x} & k_{\Pi} \sqrt{N_x N_{\Pi}} \\ k_{\Pi} \sqrt{N_x N_{\Pi}} & k_{\Pi} \sqrt[4]{4 K_{\Pi}^2 N_x^3 N_{\Pi}} \end{bmatrix}.$$

Матрица усиления определяется уравнением (11.62):

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{4k_n^2 N_x / N_{\Pi}} \\ k_n = \sqrt{N_x / N_{\Pi}} \end{bmatrix}.$$

Уравнения оптимальной системы имеют вид

$$\hat{g}_1(t) = \hat{g}_2(t) + k_1 e(t);$$

$$\hat{g}_2(t) = k_2 e(t),$$

где $e(t) = f(t) - \hat{g}_1(t)$.

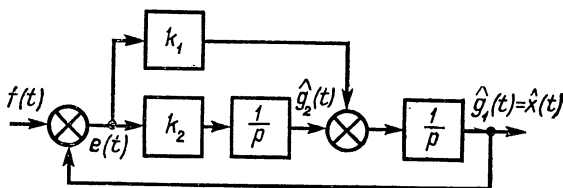


Рис. 11.7. Структурная схема оптимальной системы второго порядка

На рис. 11.7 изображена структурная схема найденной оптимальной системы, передаточная функция которой

$$W_0(p) = \frac{k_2(1 + pT_K)}{p^2 + pk_2T_K + k_2},$$

где $T_K = k_1/k_2$ — постоянная времени.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 11

1. Поясните физический смысл переменных состояния в дискретных системах.
2. Сформулируйте задачу синтеза дискретного фильтра Калмана.
3. Поясните структурную схему оптимального фильтра в задаче фильтрации.
4. Что такое неустойчивость фильтров Калмана?
5. Поясните метод предельного перехода от дискретного оптимального фильтра к непрерывному.
6. Как можно получить оптимальный фильтр Винера из фильтра Калмана?

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 12.1. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Строго говоря, линейных систем РА не существует, так как характеристики реальных устройств нелинейные и некоторые из них не могут быть линеаризованы, например характеристика релейного элемента. При больших отклонениях сигналов от установившихся значений приходится учитывать нелинейные свойства и элементов систем РА, допускающих линеаризацию. В этих случаях процессы в системах РА описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что существенно усложняет их анализ.

В системах РА встречаются устройства с различными нелинейными характеристиками ограничения, зоны нечувствительности, люфтов в механических передачах. Нелинейными являются дискриминационные характеристики различных систем автоматической подстройки частоты и пеленгационные системы автоматического сопровождения цели РЛС.

При составлении дифференциальных уравнений нелинейных систем РА сначала составляют дифференциальные уравнения для каждого устройства системы. При этом характеристики устройств, допускающих линеаризацию, линеаризуются. В результате получают систему дифференциальных уравнений, в которой одно или несколько уравнений нелинейные. Устройства, допускающие линеаризацию, образуют линейную часть системы РА, а устройства, которые не могут быть линеаризованы, составляют нелинейную часть.

Во многих системах РА нелинейные устройства можно представить как статические, зависимость выходного сигнала от входного в которых описывается линейной зависимостью вида $y = F(x)$.

Встречаются случаи, когда линейные устройства описываются дифференциальными уравнениями вида $y = F(x, \dot{x})$.

Характерной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них автоколебаний. Исследование условий возникновения автоколебаний, их устойчивости и параметров (амплитуды и частоты) явля-

ется одной из задач анализа нелинейных систем. В системах РА с дискриминационными характеристиками приходится оценивать условия, при которых наступает срыв слежения.

В настоящее время не создано общей теории анализа нелинейных систем автоматики. Разработанные методы позволяют решать лишь отдельные нелинейные задачи. Рассмотрим основные методы анализа нелинейных систем автоматики: 1) метод фазовой плоскости; 2) метод кусочно-линейной аппроксимации; 3) метод гармонической линеаризации; 4) метод статистической линеаризации; 5) метод моделирования.

Метод фазовой плоскости применяется для анализа нелинейных систем, порядок которых не выше второго. На плоскости с координатами $e(t)$ и $\dot{e}(t)$, где $e(t)$ — ошибка системы или какой-либо другой сигнал, строится траектория движения системы. Плоскость и траекторию движения систем называют фазовыми. По характеру фазовой траектории оценивается качество работы системы.

Метод кусочно-линейной аппроксимации используется в том случае, когда нелинейная часть системы безынерционна и ее характеристика может быть аппроксимирована прямолинейными участками. На каждом таком участке процессы в системе описываются линейными дифференциальными уравнениями, решение которых может быть найдено. В точках излома нелинейной характеристики решения «сшиваются»: значения переменных в конце данного участка принимаются за начальные условия для последующего участка. Таким образом удается построить фазовую траекторию движения системы. При большом числе аппроксимированных участков нелинейной характеристики и дифференциальных уравнениях линейной части выше второго порядка вычисления фазовой траектории становятся громоздкими.

Метод гармонической линеаризации базируется на замене нелинейного элемента линейным звеном, параметры которого определяются при синусоидальном входном сигнале из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена. Данный метод может быть использован в том случае, когда линейная часть системы является низкочастотным фильтром, т. е. отфильтровывает все возникающие на выходе нелинейного звена гармонические составляющие, кроме первой гармоники.

Метод статистической линеаризации является приближенным и применим для систем произвольного порядка. Он основан на замене нелинейного элемента линейным звеном, коэффициенты передачи которого по математическому ожиданию и случайной составляющей сигнала на входе нелинейного элемента определяются из условия статистической эквивалентности нелинейного звена линейному звену.

Метод моделирования основан на использовании для анализа нелинейных систем РА различных вычислительных машин. Этот метод не накладывает ограничений на порядок исследуемых систем и позволяет оценить качество систем при большом наборе начальных условий и различных видах входных сигналов и помех.

В инженерной практике для анализа нелинейных систем РА применяются методы гармонической и статистической линеаризации. Эти методы являются приближенными. Для анализа систем РА, порядок которых не выше второго, также используется метод, основанный на теории марковских случайных процессов, позволяющий получить точное решение.

§ 12.2. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Рассмотрим метод гармонической линеаризации нелинейных характеристик, когда нелинейное звено является статическим. Пусть на вход линейного звена действует сигнал $x = a \sin \psi$, $\psi = \omega t$.

Сигнал на выходе этого звена также будет периодическим. Разложив его в ряд Фурье, получим

$$y = F(a \sin \psi) = q(a) a \sin \psi + q'(a) a \cos \psi + y_{\text{вг}}, \quad (12.1)$$

где $y_{\text{вг}}$ — слагаемое, учитывающее вторые и более высокие гармонические составляющие.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi; \\ q'(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (12.2)$$

При определении разложения (12.1) полагали, что постоянная составляющая отсутствует. Так как $a \cos \psi =$

$=\chi r/\omega$, то разложение (12.1) можно записать в виде

$$y = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x. \quad (12.3)$$

Последнее выражение называют *уравнением гармонической линейаризации*, а коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ — *коэффициентами гармонической линейаризации*.

Таким образом, нелинейное звено при воздействии гармонического сигнала описывается уравнением (12.3), которое с точностью до высших гармоник является линейным. Эта операция и называется гармонической линейаризацией нелинейного звена. При постоянных значениях амплитуды входного сигнала коэффициенты гармонической линейаризации являются постоянными. Различным амплитудам входного сигнала соответствуют различные коэффициенты гармонической линейаризации. Именно в этом заключается принципиальное отличие гармонической линейаризации от обычной, коэффициенты которой не зависят от амплитуды входного сигнала, а определяются только видом характеристики нелинейного звена.

Уравнение гармонической линейаризации (12.3) — это линейное уравнение, поэтому и вся система РА становится линейной. Для ее исследования могут быть использованы методы, разработанные для линейных систем. Зависимость коэффициентов гармонической линейаризации от амплитуды сигнала на входе нелинейного звена позволяет выявить специфические свойства нелинейных систем, которые не могут быть определены при использовании обычной линейаризации.

Определим коэффициент гармонической линейаризации для некоторых нелинейных характеристик, анализ которых позволяет установить некоторые важные для практики положения. Первоначально рассмотрим характеристику с ограничением, график которой показан на рис. 12.1. В соответствии с формулами (12.2) находим, что

$$\begin{aligned} q(a) = & \frac{1}{\pi a} \left[\int_0^{\alpha} a \sin \psi \, d\psi + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} c \sin \psi \, d\psi + \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} a \sin^2 \psi \, d\psi + \right. \\ & + \int_{\pi-\alpha}^{2\pi-\alpha} c \sin \psi \, d\psi + \left. \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} a \sin^2 \psi \, d\psi \right] = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\alpha}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{c}{a} \cos \alpha \right]; \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$q'(a) = 0,$$

где α — значение аргумента, при котором наступает ограничение $\alpha = \arcsin(c/a)$.

Из выражения (12.4) следует важный вывод: для однозначных нелинейных характеристик коэффициент гармонической линейаризации $q'(a)$ равен нулю и уравнение гармонической линейаризации имеет вид $y = q(a)x$.

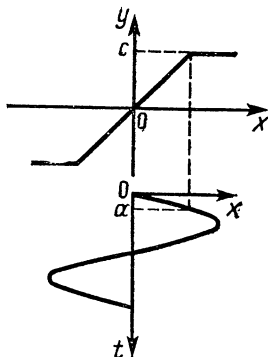


Рис. 12.1. К определению коэффициентов гармонической линейаризации

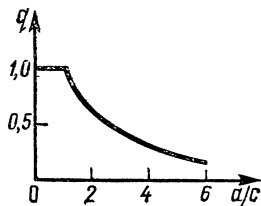


Рис. 12.2. Зависимость коэффициента гармонической линейаризации нелинейной характеристики с ограничением от амплитуды входного сигнала

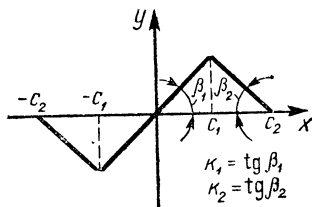


Рис. 12.3. Дискриминационная характеристика нелинейного звена

На рис. 12.2 изображена зависимость коэффициента гармонической линейаризации от амплитуды входного сигнала, рассчитанная по формуле (12.4).

Рассмотрим дискриминационную характеристику звена, график которой приведен на рис. 12.3. Характеристика однозначна, поэтому, как и в предыдущем случае, коэффициент гармонической линейаризации $q'(a)$ равен нулю. Коэффициент $q(a)$ вычисляется по формулам при $c_1 < a < c$

$$q(a) = -k_2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{\pi} \left[\arcsin \frac{c_1}{a} + \frac{c_1}{a} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} \right], \quad (12.5)$$

при $a \geq c_2$

$$q(a) = \frac{2}{\pi} \left[(k_1 + k_2) \left(\arcsin \frac{c_1}{a} + \frac{c}{a^2} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - k_2 \left(\arcsin \frac{c_2}{a} - \frac{c_2}{a} \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{a^2}} \right) \right) \right]. \quad (12.6)$$

На рис. 12.4 показана зависимость коэффициента $q(a)$ от амплитуды сигнала, вычисленная по (12.5) и (12.6).

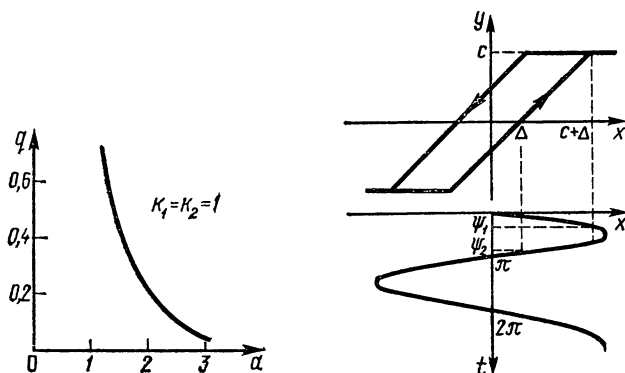


Рис. 12.4. Зависимость коэффициента гармонической линейаризации дискриминационной характеристики нелинейного звена от амплитуды входного сигнала

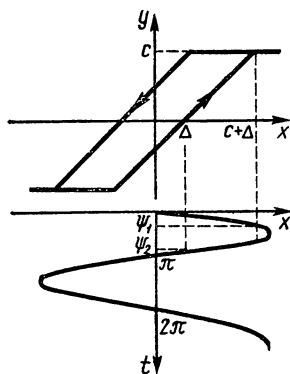


Рис. 12.5. К определению коэффициента гармонической линейаризации нелинейной характеристики звена с люфтом

На рис. 12.5 изображена нелинейная характеристика звена с люфтом. Эта характеристика неоднозначна. Непосредственно из рис. 12.5 и формул (12.2) следует, что коэффициенты гармонической линейаризации определяются выражениями

$$q(a) = \frac{1}{\pi} \left(\psi_2 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right); \\ q'(a) = -\frac{1}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1)$$

при $a > c + \Delta$,

где $\psi_1 = \arcsin \frac{c - \Delta}{a}$; $\psi_2 = \arcsin \frac{c + \Delta}{a}$.

Графики изменения коэффициентов гармонической линеаризации характеристики звена люфтом показаны на рис. 12.6.

Таким образом, если характеристика нелинейного звена неоднозначна, то оба коэффициента гармонической

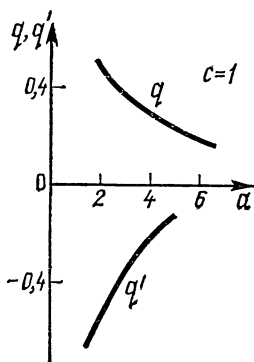


Рис. 12.6. Зависимость коэффициента гармонической линеаризации характеристик звена с люфтом от амплитуды входного сигнала

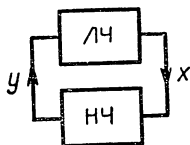


Рис. 12.7. К определению уравнения нелинейной системы РА

линеаризации не равны нулю. Поэтому уравнение гармонической линеаризации (12.3) зависит не только от амплитуды, но и от частоты сигнала на входе нелинейного звена.

§ 12.3. УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Ранее отмечалось, что при исследовании нелинейных систем РА обычно удается представить систему в виде последовательного соединения двух частей: линейной и нелинейной (рис. 12.7). Запишем передаточную функцию линейной части в виде

$$W_{\text{л}}(p) = -N(p)/D(p).$$

Принимая во внимание уравнение (12.3), уравнение

нелинейной системы можно записать так:

$$D(p) + N(p) \left[q(a) + q'(a) \frac{p}{\omega} \right] = 0. \quad (12.7)$$

В этом выражении не учтены высшие гармоники. Это сделано не случайно и не потому, что они малы. Дело в том, что если в отдельном нелинейном звене при подаче на его вход синусоидального сигнала в выходном сигнале всегда имеются высшие гармоники, то при включении нелинейного звена в замкнутый контур системы из-за фильтрующих свойств линейной части системы высшими гармониками на входе нелинейного звена можно пренебречь.

Если в замкнутой нелинейной системе РА возникают автоколебания с постоянной амплитудой и частотой, то коэффициенты гармонической линеаризации оказываются постоянными, а вся система стационарной. Незатухающие колебания в замкнутых системах, как показано в гл. 5, возникают в том случае, когда характеристическое уравнение системы содержит пару мнимых сопряженных корней. Потому для оценки возможности возникновения в нелинейной системе автоколебаний необходимо в гармонически линеаризованное характеристическое уравнение системы вместо p подставить $j\omega$. В результате получают уравнение, коэффициенты которого зависят от амплитуды и частоты предполагаемого автоколебательного режима. Если это уравнение удовлетворяется при действительных значениях амплитуды автоколебаний a_k и частоты ω_k , то в исследуемой системе могут возникнуть автоколебания с амплитудой a_k и частотой ω_k , устойчивость существования которых необходимо дополнительно оценить.

Таким образом, для оценки возможности возникновения автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации необходимо найти условия границы устойчивости, как это делалось при анализе устойчивости линейных систем РА.

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной линейной системы имеет вид (12.7). Подставив в него $p = j\omega$, получим

$$D(j\omega) + N(j\omega) [q(a) + jq'(a)] = 0.$$

Выделив в последнем выражении вещественную и мнимую части, найдем уравнение

$$B(\omega) + jC(\omega) = 0. \quad (12.8)$$

Если при таких значениях a_k и ω_k выражение (12.8) удовлетворяется, то в системе возможен автоколебательный режим, параметры которого рассчитываем по следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} B(\omega_k, a_k) &= 0; \\ C(\omega_k, a_k) &= 0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Из формул (12.9) можно найти зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы, например от коэффициента усиления линейной части системы. Для этого необходимо в уравнениях (12.9) коэффициент усиления считать переменной величиной, т. е. эти уравнения записать в таком виде:

$$\begin{aligned} B &= (\omega_k, a_k, k) = 0; \\ C &(\omega_k, a_k, k) = 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

По графикам $a_k = f(k)$, $\omega_k = f(k)$ можно выбрать коэффициент усиления, при котором амплитуда и частота возможных автоколебаний имеют допустимые значения или вообще отсутствуют.

§ 12.4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Решение уравнений (12.9) и (12.10) обычно связано с большими вычислительными трудностями, так как коэффициенты гармонической линеаризации имеют сложную зависимость от амплитуды входного сигнала. Кроме того, помимо определения амплитуды и частоты возможных автоколебаний в нелинейной системе, необходимо оценить их устойчивость. В инженерной практике для этого используется частотный метод, который базируется на приближенном выражении для передаточной функции нелинейного звена, определяемой следующим выражением:

$$W_n(a) = q(a) + j q'(a), \quad (12.11)$$

где коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ вычисляются по (12.2).

Если нелинейная характеристика однозначна, то $q'(a) = 0$ и $W_n(a) = q(a)$.

Передаточная функция (12.11) определяет амплитуду и фазу первой гармоники колебаний сигнала на выходе нелинейного звена:

$$a_y = |W_n(a)| a, \quad \theta_n(a) = \arctg \frac{q'(a)}{q(a)},$$

где $|W_n(a)| = \sqrt{q^2(a) + q^{12}(a)}$; $\theta_n(a)$ — амплитудная и фазовая характеристики нелинейного звена; a — амплитуда колебаний на входе нелинейного звена.

Таким образом, сигнал на выходе нелинейного звена

$$y = a_y \sin(\omega t + \theta_n(a)).$$

Так как линейная и нелинейная части системы соединены последовательно, то частотная характеристика разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = W_n(j\omega) W_n(a). \quad (12.12)$$

Из выражения (12.12) следует, что частотная характеристика разомкнутой нелинейной системы зависит не только от частоты входного сигнала, как это имеет место в линейных системах, но и от его амплитуды. В соответствии с критерием устойчивости Найквиста незатухающие колебания в линейной системе возникают в том случае, когда частотная характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами $-1, j0$. Данное условие является также условием существования автоколебаний в нелинейной системе, т. е.

$$W_p(j\omega, a) = -1. \quad (12.13)$$

С учетом (12.12) условие (12.13) принимает вид

$$W_n(j\omega) W_n(a) = -1$$

или

$$W_n(j\omega) = -\frac{1}{W_n(a)} = -W_n^{-1}(a). \quad (12.14)$$

Решение уравнения (12.14) относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически, как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы и годографа обратной характеристики нелинейной части, взятой с обратным знаком. Если эти годографы не пересекаются, то режим автоколебаний в исследуемой системе не существует.

Устойчивость автоколебательного режима оценивается следующим образом. Режим автоколебаний устойчив, если точка на годографе нелинейной части $W_n^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде по сравнению со значением в точке пересечения годографов (12.14), не охватывается годографом частотной характеристики линейной части системы. В противном случае автоколебательный режим неустойчив. На рис. 12.8, а годографы пе-

ресекаются в точках b и c . Точка b определяет неустойчивый режим автоколебаний, так как точка годографа $W_H^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде, охватывается годографом частотной характеристики линейной части системы. Точке c соответствует устойчивый режим автоколебаний, амплитуда которого определяется по годографу $W_H^{-1}(a)$ и равна $a_{к1}$, а частота — по годографу

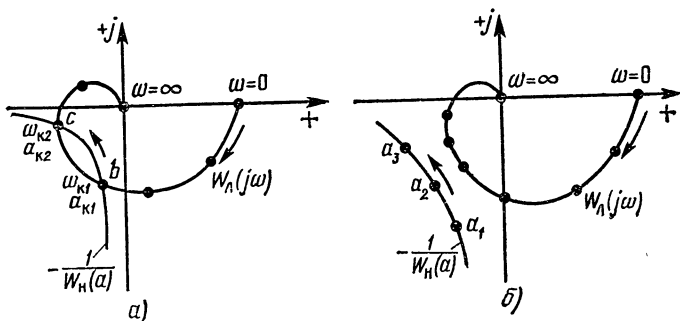


Рис. 12.8. К определению устойчивости автоколебаний в нелинейной системе

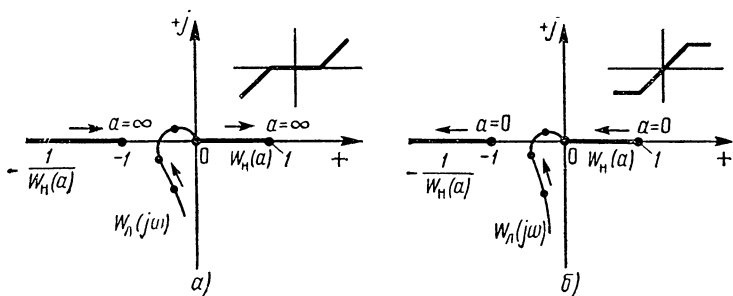


Рис. 12.9. К определению параметров автоколебаний в системах с однозначными нелинейными характеристиками

$W_L(j\omega)$ и равна $\omega_{к1}$. На рис. 12.8, б дан пример расположения годографов для случая, когда автоколебания в нелинейной системе отсутствуют.

На рис. 12.9, а, б изображены годографы нелинейных характеристик звеньев, которые часто встречаются при исследовании нелинейных систем РА. Из этих характеристик следует, что в нелинейных системах, частотные

характеристики линейных частей которых не имеют точек пересечения с участием действительной оси от -1 до $-\infty$, автоколебания отсутствуют, т. е. когда выполняется условие устойчивости линейной системы, получаемой из нелинейной путем замены нелинейного звена линейным.

§ 12.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для оценки статистических характеристик нелинейных систем РА можно использовать метод статистической линеаризации, основанный на замене нелинейной характеристики линейной, которая в известном смысле статистически равновалентна исходной нелинейной характеристике. Для приближенной оценки, когда оперируют моментами первого и второго порядка (математическим ожиданием и дисперсией), можно считать статистически равноценными характеристики, имеющие равные значения этих моментов при заданном законе распределения входного сигнала.

Заменим нелинейную зависимость $y=F(x)$ линейной характеристикой

$$z = kx, \quad (12.15)$$

которая имеет такие же математические ожидания и дисперсию, какие имеются на выходе нелинейного звена с характеристикой $y=F(x)$. С этой целью представим (12.15) в виде

$$z = k_0 m_x + k_{11} \overset{\circ}{x},$$

где $\overset{\circ}{x}$ — центрированная случайная функция.

Выберем коэффициенты k_0 и k_{11} такими, чтобы

$$m_z = k_0 m_x = m_y; \quad \sigma_z^2 = k_{11}^2 \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad (12.16)$$

где m_x , m_y , m_z — математические ожидания сигналов; σ_x^2 , σ_y^2 , σ_z^2 — дисперсии сигналов.

Из выражений (12.16) следует, что статистическая равноценность имеет место, если

$$k_0 = m_y/m_x, \quad k_{11} = \pm \sigma_y/\sigma_x, \quad (12.17)$$

причем знак k_{11} должен совпадать со знаком производной нелинейной характеристики $F(x)$.

Величины k_0 и k_{11} называют *коэффициентами статистической линеаризации*. Для их вычисления нужно знать математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе

де нелинейного звена:

$$\begin{aligned} m_y &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \omega(x) dx; \\ \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \omega(x) dx, \end{aligned} \quad (12.18)$$

где $\omega(x)$ — плотность вероятности распределения случайного сигнала на входе нелинейного звена.

Рассмотренный метод статистической линейаризации не всегда является наилучшим, поэтому целесообразно статистическую линейаризацию выполнить из условия наилучшего приближения корреляционной функции сигнала на выходе нелинейного звена к корреляционной функции на выходе линейного звена. С этой целью определим коэффициенты статистической линейаризации с учетом того, чтобы дисперсия отклонения сигнала на выходе нелинейного звена, определяемая выражением

$$M[(z - y)^2] = k_0^2 m_x^2 + k_{12}^2 \sigma_x^2 - 2k_0 m_x m_y - 2k_{12} M[xy] + M[y^2],$$

была минимальной. Приравняв нулю производные от последнего выражения по k_0 и k_{12} , запишем уравнения

$$\begin{aligned} 2k_0 m_x^2 - 2m_x m_y &= 0; \\ 2k_{12} \sigma_x^2 - 2M[xy] &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае коэффициенты статистической линейаризации вычисляются по формулам

$$k_0 = m_x/m_y; \quad k_{12} = \frac{M[xy]}{\sigma_x^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x) \omega(x) dx. \quad (12.19)$$

Таким образом, статистическая линейаризация из условия минимума дисперсии ошибки дает то же значение коэффициента k_0 , которое было найдено при первом способе линейаризации; коэффициент линейаризации относительно случайной составляющей k_{12} имеет другое значение. Рекомендуется брать их среднее арифметическое значение: $k_1 = (k_{11} + k_{12})/2$.

Обратим внимание, что коэффициенты статистической линейаризации зависят от математического ожидания

и дисперсии сигнала на входе нелинейного звена (в этом заключается существенное отличие статистической линеаризации от обычной).

Коэффициенты статистической линеаризации, как следует из выражений (12.17) — (12.19), зависят не только от характеристик нелинейного звена, но и от закона распределения сигнала на его входе. Во многих практических случаях закон распределения этой случайной величины может быть принят гауссовским. Это объясняется тем, что нелинейные звенья в системах РА соединяются последовательно с линейными инерционными элементами, законы распределения выходных сигналов которых близки к гауссовским при любых законах распределения их входных сигналов. Чем более инерционна система, тем ближе закон распределения сигнала на выходе к гауссовскому, т. е. инерционные устройства системы приводят к восстановлению гауссовского распределения, нарушаемого нелинейными звеньями. Кроме того, изменение закона распределения в широких пределах мало влияет на коэффициенты статистической линеаризации. Поэтому полагают, что сигналы на входе нелинейных звеньев распределены по гауссовскому закону. При этом коэффициенты k_0 и k_1 зависят только от математического ожидания и дисперсии сигнала на входе нелинейного звена, поэтому для типовых нелинейных характеристик коэффициенты k_0 и k_1 могут быть заранее вычислены, что существенно упрощает расчеты систем методом статистической линеаризации.

Пример 12.1. Определить коэффициенты статистической линеаризации для дискриминатора с синусоидальной характеристикой $y = A \sin ax$.

Решение. В соответствии с выражениями (12.17) и (12.19)

$$\begin{aligned} z &= k_0 m_x = A \sin am_x \exp(-y^2 \sigma_x^2 / 2); \\ k_{11} &= \frac{A}{\sigma_x} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos am_x \exp(-a^2 \sigma_x^2 / 2)) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{k_0 m_x}{A} \right)^2 \right]^{1/2}; \\ k_{12} &= Aa \exp(-a^2 \sigma_x^2 / 2) \cos am_x. \end{aligned} \quad (12.20)$$

На рис. 12.10, *а, б* изображены зависимости, вычисленные по формулам (12.20) для $A=5$, $a=0,314$, из которых видно, что увеличение дисперсии входного сигнала σ_x^2 приводит к уменьшению коэффициентов статистической линеаризации; при большом уровне помех их значения близки к нулю.

Зависимости (12.20) приближенно справедливы и для дискриминатора с характеристикой

$$y = \begin{cases} A \sin x & \text{при } -\pi \leq ax \leq \pi; \\ 0 & \text{при } |ax| > \pi. \end{cases} \quad (12.21)$$

Выражение (12.21) часто используется для аппроксимации дискриминационных характеристик при анализе систем автоматического сопровождения цели РЛС и систем автоподстройки частоты.

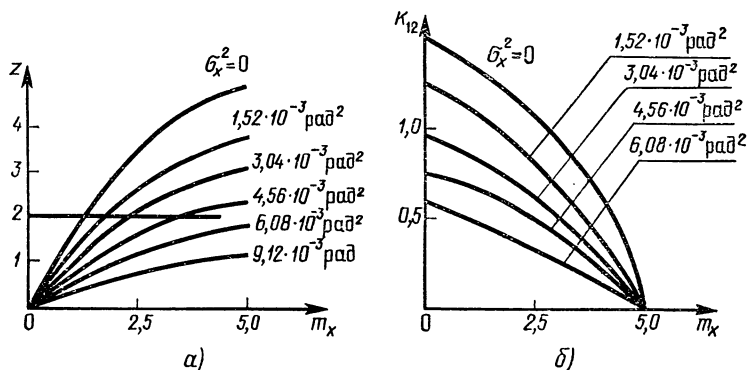


Рис. 12.10. К определению коэффициентов статистической линейризации

§ 12.6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ И СРЫВА СЛЕЖЕНИЯ

Возможность замены характеристик нелинейных звеньев линейными зависимостями позволяет при анализе нелинейных систем использовать методы, разработанные для линейных систем РА. Применим метод статистической линейризации для анализа стационарных режимов в системе РА (рис. 12.11). Нелинейным устройством является дискриминатор с характеристикой $F(e)$, где e — сигнал ошибки системы. Задача анализа заключается в оценке влияния характеристик дискриминатора на точность системы и определении условий, при которых нарушается нормальная работа системы и происходит срыв слежения.

При анализе точности работы системы относительно неслучайной составляющей сигнала $\varphi(t)$ нелинейный элемент $F(e)$ в соответствии с методом статистической линейризации заменяется линейным звеном с коэффици-

ентом передачи k_0 . По формуле (6.13) найдем математическое ожидание сигнала ошибки:

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) \varphi(p), \quad (12.22)$$

где $W_e(p) = \frac{1}{1 + k_0 (m_e \sigma_e) W(p)}$ — передаточная функция ошибки системы.

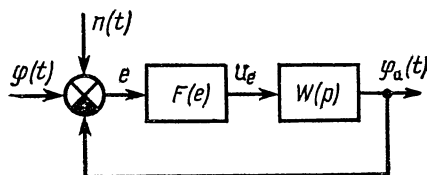


Рис. 12.11. Структурная схема нелинейной системы РА

Отметим, что математическое ожидание сигнала ошибки (12.22) имеет конечное значение, если степень медленно изменяющегося сигнала $\varphi(t)$ не превышает порядка астатизма системы.

При анализе системы относительно случайной составляющей $n(t)$ (помехи) нелинейный элемент заменяется линейным звеном с коэффициентом передачи k_1 . При этом выражение для дисперсии сигнала ошибки в соответствии с (6.20) принимает вид

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + k_1 (m_e \sigma_e) W(p)} \right|^2 S_n(\omega) d\omega, \quad (12.23)$$

где $S_n(\omega)$ — спектральная плотность помехи.

Для определения m_e и σ_e^2 необходимо решить систему алгебраических уравнений (12.22) и (12.23). Для этого можно использовать метод приближенных вычислений, в соответствии с которым при каких-либо значениях m_e и σ_e^2 находятся коэффициенты статистической линеаризации k_0 и k_1 , после чего по формулам (12.22) и (12.23) вычисляются значения m_e и σ и т. д. до тех пор, пока не совпадут два последовательных приближения. Уравнения (12.22) и (12.23) могут быть решены и графически. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 12.2. Найти суммарную среднюю квадратическую ошибку системы автоматического сопровождения цели (рис. 12.11). Рас-

четы провести для случая, когда $\varphi(t) = \alpha t$, $\alpha = 0,7$ рад·с⁻¹, а передаточная функция исполнительного устройства системы $W(p) = k_n/p$, где $k_n = 0,35$ рад/(с·В).

Решение. Спектральная плотность помехи, действующей на вход системы,

$$S_{\Pi}(\omega) = \frac{N_{\Pi}}{1 + \omega^2 T_{\Pi}^2},$$

где $N_{\Pi} = 0,3 \cdot 10^{-3}$ рад²·с; $T_{\Pi} = 0,05$ с.

Пеленгационная характеристика системы сопровождения аппроксимируется выражением (12.21), в котором $A = 5$ В; $a = 0,314$.

Уравнения (12.22) и (12.23) для рассматриваемой системы получают следующими:

$$m_e = \frac{\alpha}{k_0 (m_e \sigma_e) k_n}; \quad (12.24)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{N_{\Pi}}{2T_{\Pi} (1 + k_1 (m_e \sigma_e) k_n)}. \quad (12.25)$$

Расчет коэффициентов статической линейризации выполним в такой последовательности. Проведем на рис. 12.10, а прямую, уравнение которой следует из выражения (12.24) и имеет вид

$$k_0 (m_e \sigma_e) m_e = \frac{\alpha}{k_n} = 2В. \quad (12.26)$$

По точкам пересечения этой прямой с изображенными на рис. 12.10, а кривыми найдем зависимость (кривая 1 на рис. 12.12)

$$\sigma_e^2 = f(m_e), \quad (12.27)$$

Формула (12.27) связывает математическое ожидание сигнала ошибки m_e и дисперсию этого сигнала σ_e , удовлетворяющие уравнению (12.26).

Для каждой пары значений m_e и σ_e^2 , связанных уравнением (12.27), по формулам (12.20) рассчитывают коэффициенты статистической линейризации k_{12} , а по формулам (12.25) — зависимость дисперсии сигнала ошибки σ_e^2 от математического ожидания этого сигнала (кривая 2 на рис. 12.12). Точка пересечения кривых 1 и 2 и определяет математическое ожидание сигнала ошибки m_e и дисперсию этого сигнала σ_e^2 . В рассматриваемой системе автоматического сопровождения цели $m_{e1} = 3,14 \cdot 10^{-2}$ рад; $\sigma_{e1}^2 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ рад². По этим значениям и кривым рис. 12.10 находят коэффициенты статистической линейризации $k_0 = 64$ В/рад; $k_{12} = 57,3$ В/рад, которые затем используют для оценки точности работы системы. Динамическая ошибка системы определена — это значение математического ожидания сигнала ошибки m_{e1} . Дисперсия ошибки системы из-за действия по-

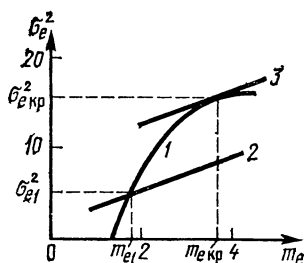


Рис. 12.12. К вычислению коэффициентов статистической линейризации в системе автосопровождения цели

мехи, согласно (6.20),

$$\sigma_{\text{еп}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 S_{\Pi}(\omega) d\omega = \frac{k_{12} k_{\Pi} T_{\Pi}}{2(1 + k_{12} k_{\Pi} T_{\Pi})} =$$

$$= 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

где $|W_3(j\omega)|$ — АЧХ замкнутой системы.

Таким образом, суммарная средняя квадратическая ошибка системы автоматического сопровождения цели

$$\sigma_{\Sigma} = (m_{\text{ел}}^2 + \sigma_{\text{еп}}^2)^{1/2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Определим условия, при которых в следящей системе из-за нелинейных свойств пеленгационной характеристики происходит срыв сопровождения цели. Процесс срыва носит случайный характер, поэтому его характеристикой является вероятность возникновения срыва за какой-то промежуток времени. Вычисление этой вероятности является сложной задачей. В инженерной практике ограничиваются выявлением характеристик сигнала и помех, при которых происходит срыв сопровождения цели. Метод статистической линеаризации позволяет решить эту задачу, при этом удобно использовать графический способ, который применялся ранее для анализа стационарных режимов в системах РА.

Оценим, при каком уровне спектральной плотности помехи происходит срыв сопровождения цели в системе, рассмотренной в примере 12.2. С увеличением уровня спектральной плотности помехи кривая 2 на рис. 12.12 не изменяет своей формы и смещается вверх; при каком-то значении N_{Π} кривые 1 и 2 не будут пересекаться. Это означает, что отсутствует совместное решение уравнений (12.24) и (12.25). Математическое ожидание и дисперсия сигнала ошибки резко возрастают и происходит срыв сопровождения цели, система становится разомкнутой, а следовательно, неработоспособной. После срыва сопровождения цели математическое ожидание сигнала ошибки неограниченно увеличивается, а дисперсия сигнала ошибки оказывается равной дисперсии помехи. Граничное значение уровня спектральной плотности помехи N_{Π} , при котором происходит срыв сопровождения цели, равно $N_{\Pi \text{ гр}}$. При этом кривая 2 на рис. 12.12 оказывается касательной к кривой 1. В рассмотренном ранее примере $N_{\Pi \text{ гр}} = 9,14 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

Граничное значение уровня спектральной плотности помехи зависит от параметров системы, управляющего воздействия и ширины спектра помехи. Так, с ростом производной управляющего воздействия увеличивается математическое ожидание сигнала ошибки, в результате чего $N_{\Pi \text{ гр}}$ уменьшается. С расширением спектра помехи $N_{\Pi \text{ гр}}$ также снижается, так как при этом увеличивается дисперсия сигнала ошибки. С ростом коэффициента передачи линейной части системы сигнал ошибки уменьшается, а следовательно увеличивается $N_{\Pi \text{ гр}}$.

§ 12.7. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Некоторые задачи анализа систем РА могут быть решены, если использовать методы, разработанные для исследования марковских процессов, отличающихся от дру-

гих случайных процессов простотой статистической связи между предыдущими и последующими значениями случайного сигнала.

Случайные процессы характеризуются n -мерной плотностью распределения вероятности $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1 = x_1(t_1)$; $x_2 = x_2(t_2)$; $x_n = x_n(t_n)$. Через условную плотность вероятности, характеризующую распределение $x(t)$ в момент времени t_n при известных значениях x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , n -мерную плотность вероятности процесса $x(t)$ можно записать так:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_1, x_2, \dots, x_n) w(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (12.28)$$

Случайный процесс $x(t)$ называют *марковским* (или процессом без последствия), если для любых n моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ условная плотность вероятности «последнего» значения x_n при известных x_1, x_2, \dots, x_{n-1} зависит только от x_{n-1} и не зависит от всех предшествующих значений, т. е. справедливо соотношение

$$w(x_n/x_2, x_1, \dots, x_{n-1}) = w(x_n/x_{n-1}). \quad (12.29)$$

Таким образом, если известно состояние марковского процесса в настоящий момент времени t_n , то его будущее значение в момент времени t_{n+1} не зависит от прошлого состояния в моменты времени t_{n-1}, t_{n-2}, \dots .

Из выражений (12.28) и (12.29) следует, что

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) w(x_n/x_{n-1}) = \\ &= w(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) w(x_{n-1}/x_{n-2}) w(x_n/x_{n-1}) = \\ &= w(x_1) w(x_2/x_1) \dots w(x_n/x_{n-1}), \end{aligned}$$

т. е. n -мерная плотность вероятности марковского процесса полностью определяется одномерной плотностью и плотностью вероятности перехода $w(x_i/x_{i-1})$.

В [12] показано, что процесс x_1, x_2, \dots, x_n является марковским, если составляющие x_i удовлетворяют следующей системе стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \xi_j(t); \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (12.31)$$

где a_i — известные нелинейные функции; $\xi_j(t)$ — независимые белые шумы с единичными спектральными плотностями N_0 .

Плотность вероятности n -мерного марковского про-

цесса, являющегося решением стохастических дифференциальных уравнений (12.31), удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) w] + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) w], \end{aligned} \quad (12.32)$$

где

$$\begin{aligned} A_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = & a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \frac{1}{4} \times \\ & \times \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} b_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \end{aligned} \quad (12.33)$$

$$\begin{aligned} B_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = & \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n N_0 b_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) b_{jk} \times \\ & \times (x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{aligned} \quad (12.34)$$

Часто встречаются случаи, когда составляющие марковского процесса удовлетворяют системе стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \xi_i(t), \quad (12.35)$$

где $\xi_i(t)$ — белые шумы, не зависящие от составляющих $x(t)$.

В этом случае коэффициенты уравнения (12.32) получаются следующими:

$$A_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t);$$

$$B_{ij} = 0,25 N_{ij},$$

где N_{ij} — взаимные спектральные плотности шумов $x(t)$.

Уравнение Фоккера—Планка позволяет найти плотность вероятности ошибки системы РА, вероятность срыва слежения цели, среднее время до срыва. Однако следует заметить, что интегрирование уравнения (12.32) является сложной математической задачей, в общем случае не решенной. Для некоторых частных случаев, имеющих практическое значение, решение этого уравнения может быть найдено.

Для анализа выходного сигнала системы РА $y(t)$ или ее ошибки $e(t)$ методами теории марковских процессов необходимо, во-первых, чтобы все случайные возмущения, действующие на систему, были белыми шумами и, во-вторых, чтобы система описывалась стохастическими дифференциальными уравнениями вида (12.31) или (12.35). Первое условие обычно выполняется, так как системы РА — это устройства с ограниченной полосой пропускания, в пределах которой спектр возмущений можно принять постоянным. Если спектр возмущений в пределах полосы пропускания изменяется, то можно ввести формирующий фильтр с белым шумом на входе, что, однако, приводит к повышению порядка стохастического дифференциального уравнения и, следовательно, к усложнению оценки характеристик нелинейной системы.

Для выполнения второго условия передаточная функция линейной части системы $W(p)$ (см. рис. 1.20) должна быть дробно-рациональной функцией оператора p . В этом случае математическое описание нелинейной системы в виде системы стохастических дифференциальных уравнений осуществляется так же, как и в линейных системах. Для приведения исходного дифференциального уравнения нелинейной системы к виду (12.31) или (12.35) следует использовать формулы (8.3) и (8.7).

Пример 12.3. Составить стохастические дифференциальные уравнения для ошибки системы (см. рис. 1.20), когда $W(p) = k(1 + pT_2)/p(1 + pT_1)$, а шум не зависит от ошибки $e(t)$.

Решение. Согласно структурной схеме системы, дифференциальное уравнение системы относительно ошибки имеет вид

$$\ddot{e}(t) + \frac{1}{T_1} \dot{e}(t) = \ddot{x}(t) + \frac{1}{T_1} x(t) - \frac{kT_2}{T_1} \frac{d}{dt} [F(e) + \xi(t)] - \frac{k}{T_1} [F(e) + \xi(t)].$$

Введем обозначение $e(t) = e_1(t)$. Составим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2(t) + h_1 [F(e) + \xi(t)]; \\ \dot{e}_2(t) &= -\frac{1}{T_1} e_2(t) + \ddot{x}(t) + \frac{1}{T_1} \dot{x}(t) + h_2 [F(e) + \xi(t)]. \end{aligned}$$

Коэффициенты h_1 и h_2 вычислим по формулам (8.7):

$$h_1 = -kT_2/T_1; \quad h_2 = -k(T_1 - T_2)/T_1^2.$$

Введенные переменные $e_1(t)$ и $e_2(t)$ являются составляющими марковского процесса,

После описания системы стохастическими дифференциальными уравнениями можно перейти к решению уравнения Фоккера—Планка, определяющему плотность вероятности ошибки системы $w(e)$ с учетом нелинейной характеристики дискриминатора. Как отмечалось, решение уравнения Фоккера—Планка может быть найдено в том случае, когда линейная часть системы имеет порядок не выше второго. Решим это уравнение для системы, в которой $W(p) = k/p$. Такая система описывается стохастическими дифференциальными уравнением

$$\dot{e}(t) = -kF(e) + \dot{x}(t) - k\sqrt{S(0, e)}\xi_1(t), \quad (12.36)$$

где $S(0, e)$ — спектральная плотность белого шума; $\xi_1(t)$ — спектральная плотность белого шума с интенсивностью, равной единице.

Уравнение Фоккера—Планка в соответствии с (12.32) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial e} [A(e)w(e)] + \frac{\partial^2}{\partial e^2} [B(e)w(e)]. \quad (12.37)$$

Коэффициенты уравнения (12.37) в рассматриваемой задаче следующие:

$$A(e) = -kF(e) + \dot{x} + \frac{1}{8} k^2 \frac{\partial S(0, e)}{\partial e},$$

$$B(e) = \frac{1}{4} k^2 S(0, e). \quad (12.38)$$

При решении уравнение Фоккера—Планка обычно записывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial e} P_v = 0, \quad (12.39)$$

где $P_v = A(e)w(e) - \frac{\partial}{\partial e} [B(e)w(e)]$ — поток плотности вероятности.

Найдем плотность вероятности ошибки в установившемся режиме $w_0(e)$. В этом режиме $\partial w(e)/\partial t = 0$. Тогда уравнение (12.39) принимает вид

$$A(e)w_0(e) - \frac{d}{de} [B(e)w_0(e)] = P_c, \quad (12.40)$$

где P_c — поток плотности вероятности в установившемся режиме, значение которого постоянно.

Плотность вероятности $w_0(e)$ — функция неотрицательная, при $e \rightarrow 0$ она быстро убывает, так что $w_0(\infty) = 0$;

при $e \rightarrow \infty$ равна нулю и производная $\partial \omega_0(e) / \partial e$, поэтому уравнение (12.40) будет следующим:

$$A(e) \omega_0(e) - \frac{\partial}{\partial e} [B(e) \omega_0(e)] = 0. \quad (12.41)$$

Проинтегрировав уравнение (12.41), найдем

$$\omega_0(e) = \frac{C}{B(e)} \exp \int_0^e \frac{A(z)}{B(z)} dz, \quad (12.42)$$

где константа C определяется из условия нормировки

$$\int_{-e_r}^{e_r} \omega_0(e) de = 1. \quad (12.43)$$

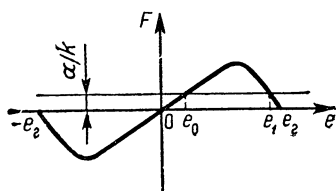


Рис. 12.13. К определению граничных значений дискриминационной характеристики

В этом выражении через e_r обозначены граничные значения дискриминационной характеристики (рис. 12.13).

Аналитическое решение уравнения Фоккера—Планда удастся получить только для нелинейных систем, в которых линейная часть описывается передаточными функциями $W(p) = k/p(1 + pT)$ или $W(p) = k/(1 + pT_1)(1 + pT_2)$. В системах более высокого порядка для решений можно использовать ЭВМ, объем вычислений в которых с повышением порядка системы существенно увеличивается. Поэтому обычно ограничиваются исследованием систем не выше второго порядка.

Одним из показателей качества работы систем РА является вероятность срыва слежения. Как отмечалось, при срыве слежения ошибка системы превышает граничные значения, в результате чего система размыкается. Если время размыкания превышает некоторое значение, то система становится неработоспособной. Вероятность возвращения ошибки в допустимые пределы за сравнительно короткое время мала, поэтому считают, что первое превышение ошибки граничных значений означает срыв слежения, вероятность которого оценивается по формуле

$$P_{\text{ср}}(t) = 1 - \int_E \omega(e, t) de, \quad (12.44)$$

где $w(e, t)$ — плотность вероятности ошибки, являющаяся решением уравнения Фоккера—Планка.

При этом полагают, что в начальный момент времени ошибка слежения e_0 удовлетворяет условию $-e_r < e_0 < e_r$, где в зависимости от решаемой задачи e_0 может быть детерминированной или случайной величиной.

При определении области интегрирования E следует иметь в виду, что реализация марковского процесса, в которых ошибка выходит за граничные значения, должны быть исключены из рассмотрения. Для этого в системах, порядок передаточной функции линейной части которых не превосходит второго, достаточно потребовать, чтобы при $e = \pm e_r$ плотность вероятности ошибки $w(e, t) = 0$; для систем более высокого порядка такое ограничение оказывается слишком жестким [12].

В том случае, когда передаточная функция линейной части системы $W(p) = k/p(1+pT)$ и $x(t) = \alpha t$, а спектральная плотность шума не зависит от ошибки, расчет вероятности срыва слежения можно выполнить по формуле [13]

$$P_{\text{ср}} = f_{\text{ск}} t \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{e_{\text{э1}}^2}{\sigma_e^2} \right) + \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{e_{\text{э2}}^2}{\sigma_e^2} \right) \right], \quad (12.45)$$

где

$$e_{\text{э1}} = \sqrt{\frac{2}{k_{\text{Д}}} \int_{e_0}^{e_1} [F(e) - \beta] de;}$$

$$e_{\text{э2}} = \sqrt{\frac{2}{k_{\text{Д}}} \int_{e_0}^{e_r} [F(e) - \beta] de;}$$

e_0, e_1 — координаты ошибки (рис. 12.13); $\beta = \alpha/k$, σ_e^2 — дисперсия ошибки в системе, в которой нелинейная характеристика заменена линейной; $f_{\text{ск}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k k_{\text{Д}}/T}$ — постоянный коэффициент, имеющий размерность частоты.

Величины $e_{\text{э1}}$ и $e_{\text{э2}}$ в (12.45) выполняют функции эквивалентных порогов в системе с линейной дискриминационной характеристикой, достижение которых рассматривается как срыв слежения. В [13] отмечается, что расчет по (12.45) позволяет определить вероятность срыва значительно точнее по сравнению с вероятностью вы-

хода ошибки за пределы линейного участка характеристики дискриминатора.

Расчет вероятности срыва слежения во многих случаях сложен и требует выполнения большого объема вычислительных работ. Поэтому часто ограничиваются оценкой менее полных характеристик. К таким характеристикам относятся, например, среднее время до срыва слежения или критический уровень шума, при котором срыв слежения еще не наступает (см. [12]).

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 12

1. В чем сущность метода гармонической линеаризации нелинейных характеристик?
2. Чем отличается гармоническая линеаризация от обычной?
3. Что такое статистическая линеаризация нелинейных характеристик? Как она осуществляется относительно математического ожидания сигнала и его случайной составляющей?
4. Как оценивается точность системы РА по методу статистической линеаризации?
5. Сформулируйте правило оценки устойчивости и параметров автоколебаний.
6. Как оцениваются условия срыва в системах РА?

ГЛАВА 13

ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

§ 13.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Систему РА, обеспечивающую наилучшие показатели качества работы при заданных условиях, называют *оптимальной*. Качество таких систем оценивается выбранным критерием оптимальности. При синтезе оптимальных систем различают два типа задач. В задачах первого типа полагают, что структурная схема системы известна и необходимо лишь найти оптимальные значения ее параметров, обеспечивающих экстремальное значение выбранного критерия оптимальности. Подобные задачи уже рассматривались в гл. 8 и 9, где изложены методики выбора оптимальных регулируемых параметров из условия минимума интегральных оценок при заданном начальном состоянии системы, минимума суммарной средней квадратической ошибки при случайных воздействиях.

В задачах второго типа система неизвестна, и необходимо определить ее структурную схему и значения параметров, обеспечивающих экстремум принятого критерия оптимальности. Методы проектирования таких оптимальных систем при случайных воздействиях проанализированы в гл. 9 и 11, в которых полагали, что характеристики воздействий и объекта управления известны и не изменяются в процессе работы или их изменения являются допустимыми и поэтому можно ограничиться найденными расчетными значениями параметров системы. В действительности статические и динамические характеристики систем РА и действующие на них воздействия в процессе работы изменяются в широких пределах непредвиденным образом, т. е. системы работают в условиях неопределенности (неполноты) априорной информации о характеристиках воздействий и состоянии объекта управления (например, параметры пеленгаторов систем измерения угловых координат РЛС сопровождения могут значительно отличаться от расчетных значений). При этом в ряде случаев практически невозможно описать процессы, возникающие в системе из-за изменения условий работы, а иногда не известны и причины, под действием которых изменяются характеристики воздействий и параметры устройств системы.

Одним из возможных способов построения оптимальных систем РА при неполной информации о воздействиях и характеристиках устройств состоит в том, чтобы выбранная структура системы и ее параметры минимизировали критерий оптимальности при наиболее неблагоприятных условиях, например, в системах автосопровождения РЛС обеспечивали минимальную ошибку при максимальном уровне воздействий и минимальном отношении сигнал/шум. Такие оптимальные системы называют *минимаксными*.

Современные системы РА с целью повышения качества их работы в условиях неполноты априорной информации строятся как адаптивные системы, в которых в процессе работы системы автоматически определяется необходимая информация о текущем управляемом процессе и в нужном направлении изменяется структура и параметры системы. Современный уровень развития радиоэлектроники и вычислительной техники позволяет создавать подобные адаптивные системы.

Оптимальные системы РА классифицируются по различным признакам. Их можно разделить на два основ-

ных класса: *системы с постоянной настройкой* (без адаптации) и *адаптивные системы*. Системы с постоянной настройкой в зависимости от вида критерия оптимальности подразделяются на:

системы оптимальные по быстродействию, где критерием оптимальности является минимум длительности переходного процесса;

системы оптимальные по точности, в которых критерий оптимальности — минимум ошибки или минимум какой-либо функции от ошибки.

Адаптивные системы в зависимости от способа адаптации делятся на:

экстремальные, в которых достигается режим, соответствующий экстремуму статической характеристики объекта управления, положение и значение которого неизвестны;

самонастраивающиеся, в которых требуемый оптимальный режим работы обеспечивается за счет автоматической настройки параметров системы;

обучающие, в которых оптимальный режим работы достигается в результате анализа и накопления информации о процессах в системе и автоматическом изменении ее структуры и параметров в зависимости от накопленного опыта.

Примерами адаптивных систем РА являются адаптивный пеленгатор РЛС, система управления антенной фазированной решеткой.

§ 13.2. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Синтез оптимальных систем, как отмечалось в § 7.1, начинается с выбора критерия оптимальности, общей формой которого является следующий квадратичный функционал:

$$J = \frac{1}{2} E^T(t) F E(t) + \frac{1}{2} \int_0^T [E^T(t) V E(t) + U^T(t) Q U(t)] dt, \quad (13.1)$$

где $E(t)$ — вектор ошибки; $U(t)$ — вектор управления.

Матрицы квадратичных форм F , V , Q определяются выражениями

$$F = \begin{bmatrix} \beta_1, 0, \dots, 0 \\ 0, \beta_2, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, \dots, \beta_n \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} \alpha_1, 0, \dots, 0 \\ 0, \alpha_2, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, \dots, \alpha_n \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1, 0, \dots, 0 \\ 0, q_2, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, \dots, q_n \end{bmatrix}.$$

Множитель 1/2 в (13.1) введен для удобства и не влияет на результат решения оптимальной задачи.

Рассмотрим частные случаи применения критерия (13.1). Если при синтезе систем РА важно оптимизировать лишь конечное состояние объекта управления при заданном начальном, то в (13.1) следует ограничиться только одним первым слагаемым. Примером таких систем являются системы радиоуправления самонаведением летательных аппаратов, в которых требуется обеспечить наименьшую ошибку в момент пролета летательного аппарата относительно цели.

При синтезе систем, в которых накладываются требования к виду переходного процесса и точности системы, первое слагаемое в (13.1) можно не вводить.

Если в проектируемой системе необходимо достичь минимальную длительность переходного процесса, то используется критерий вида

$$J = \int_0^T dt = T. \quad (13.2)$$

Задача синтеза оптимальных систем заключается в следующем. Известно векторное дифференциальное уравнение объекта управления необходимо найти вектор управления (алгоритм управления), который переводит объект управления из начального состояния в конечное, удерживает в этом конечном состоянии или изменяет его в соответствии с входным сигналом, обеспечивая при этом экстремальное значение критерия оптимальности. Синтез считается законченным, если алгоритм управления найден как функция вектора переменных состояния объекта управления при известных ограничениях на составляющие вектора управления.

Рассмотрим синтез системы стабилизации, полагая, что входной сигнал равен нулю, а объект управления

описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{G}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{G}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t); \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C}^T \mathbf{G}(t),\end{aligned}\quad (13.3)$$

где $\mathbf{G}(t)$ — выходной вектор объекта управления.

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{G}^T(t) \mathbf{V}\mathbf{G}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] dt, \quad (13.4)$$

где $\mathbf{G}(t) = -\mathbf{E}(t)$, так как входной вектор равен нулю.

В критерии (13.4) по сравнению с (13.1) отсутствует первое слагаемое, так как при $T = \infty$ оценка конечного состояния не имеет смысла. Кроме того, верхний предел интегрирования в (13.4) равен бесконечности. При этом можно гарантировать, что после окончания переходного процесса достигнутое нулевое состояние будет сохранено. Для решения оптимальной задачи стабилизации используем *принцип максимума Понтрягина*, согласно которому оптимальный вектор управления соответствует максимуму скалярной функции Гамильтона, определяемой выражением

$$H = -\frac{1}{2} [\mathbf{G}^T(t) \mathbf{V}\mathbf{G}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] + \dot{\mathbf{G}}^T(t) \mathbf{P}(t). \quad (13.5)$$

Подставив уравнение (13.3) в (13.5), найдем что

$$\begin{aligned}H = & -\frac{1}{2} [\mathbf{G}^T(t) \mathbf{V}\mathbf{G}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] + [\mathbf{A}\mathbf{G}(t) + \\ & + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)]^T \mathbf{P}(t).\end{aligned}\quad (13.6)$$

В последних двух выражениях через $\mathbf{P}(t)$ обозначен вспомогательный вектор, являющийся решением векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{G}(t)}. \quad (13.7)$$

Производную вектора состояния определим из (13.5)

$$\dot{\mathbf{G}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}(t)}. \quad (13.8)$$

Систему дифференциальных уравнений (13.7) и (13.8) называют *канонической*.

Исследование функции (13.6) на максимум относительно вектора управления позволяет определить опти-

мальное управление

$$U(t) = Q^{-1} B^T P(t). \quad (13.9)$$

Из (13.9) следует, что для вычисления оптимального управления нужно найти вектор $P(t)$. Для этого необходимо решить каноническую систему уравнений (13.7) и (13.8), начальными условиями для которой являются начальное состояние объекта управления $G(0)$ и конечное значение $P(\infty) = 0$. Вычислив $P(t)$, найдем оптимальное управление как функцию времени, которое предварительно должно быть рассчитано и запомнено, после чего оно может быть подано на объект управления. Очевидно, что при таком способе управления получается разомкнутая система со всеми присущими ей недостатками. Поэтому следует получить оптимальное управление через вектор переменных состояния $U(t) = f[G(t)]$. Для этого необходимо вектор $P(t)$ выразить через $G(t)$:

$$P(t) = -KG(t). \quad (13.10)$$

Матрица усиления K удовлетворяет следующему матричному уравнению:

$$V + KA + A^T K - KSK = 0, \quad (13.11)$$

где $S = BQ^{-1}B^T$.

Подставив (13.10) в формулу (13.9), определим

$$U(t) = -Q^{-1} B^T K G(t). \quad (13.12)$$

На рис. 13.1 показана структурная схема оптимальной системы стабилизации. Система линейна, так как на вектор управления не наложено никаких ограничений.

Определение матрицы K по (13.11) сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Так как K — симметричная матрица, то число уравнений равно $0,5n(n+1)$, где n — порядок вектора состояния. Из найденных решений следует отобрать только то, при котором матрица K является положительно определенной.

Для вычисления элементов матрицы K могут быть использованы ЭВМ, на которых следует решить матрич-

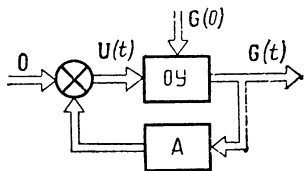


Рис. 13.1. Структурная схема оптимальной системы стабилизации

ное уравнение Риккати:

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}(t) = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{K}}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{K}}(t) - \tilde{\mathbf{K}}(t) \mathbf{S} \tilde{\mathbf{K}}(t) \quad (13.13)$$

с граничными условиями $\tilde{\mathbf{K}}(T) = 0$, где время T выбрано достаточно большим. Если момент времени T принять начальным, а $\mathbf{K}(T)$ — начальным условием, то матрица \mathbf{K} определяется как асимптотическое решение уравнения Риккати при уменьшении времени. Для того чтобы получить решение уравнения Риккати, соответствующее увеличению времени, вводят переменную $\tau = T - t$. Тогда уравнение (13.13) принимает вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}(\tau) = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{K}}(\tau) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{K}}(\tau) - \tilde{\mathbf{K}}(\tau) \mathbf{S} \tilde{\mathbf{K}}(\tau).$$

Это уравнение решается на ЭВМ с начальным условием $\tilde{\mathbf{K}}(0) = 0$. При достаточно большом T установившееся значение $\mathbf{K}(\tau)$ позволяет найти элементы матрицы \mathbf{K} .

Рассмотрим синтез оптимальной системы слежения, качество работы которой оценивается функционалом

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{E}^T(t) \mathbf{V} \mathbf{E}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{U}(t)] dt, \quad (13.14)$$

где $\mathbf{E}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}(t)$ — вектор ошибки; $\mathbf{X}(t)$ — входной вектор.

Объект управления описывается уравнением (13.3), оптимальное управление в задаче слежения определяется выражением (13.9), в котором вспомогательный вектор $\mathbf{P}(t)$ зависит не только от вектора состояния объекта управления, но и от входного вектора:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{G}(t) + \mathbf{Z}(t), \quad (13.15)$$

где $\mathbf{Z}(t)$ — неизвестный вектор, являющийся решением уравнения

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = [\mathbf{K} \mathbf{S} - \mathbf{A}^T] \mathbf{Z}(t) + \mathbf{V} \mathbf{X}(t). \quad (13.16)$$

Так как $\mathbf{X}(t)$ известен, то уравнение (13.16) может быть решено при граничных условиях $\mathbf{Z}(\infty) = \mathbf{X}(\infty) = 0$. Для входных сигналов, не удовлетворяющих этим граничным условиям, решение оптимальной задачи слежения не найдено.

Для определения вектора $\mathbf{Z}(t)$ в системе должно быть предусмотрено специальное вычислительное устройство, этот вектор можно рассчитать заранее и поместить в память вычислителя.

Пример 13.1. Определить алгоритм оптимального управления для системы, передаточная функция объекта управления которой $W_0(p) = b_0/(p + a_1 p^2)$. Такую передаточную функцию имеет, например, разомкнутая система ФАПЧ без фильтра нижних частот.

Решение. Данной передаточной функции соответствует система уравнений в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}\dot{g}_1(t) &= g_2(t); \\ g_2(t) &= -a_1 g_1(t) + b_0 u(t).\end{aligned}$$

Критерий оптимальности

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [g_1^2(t) + \alpha g_2^2(t) + q u^2(t)] dt.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad Q = q.$$

В соответствии с уравнением (13.12) оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = [k_{21} g_1(t) + k_{22} g_2(t)] b_0 / q.$$

Элементы матрицы усиления в последнем выражении определим из решения системы алгебраических уравнений, которая получается из уравнения (13.11):

$$\begin{aligned}k_{12} &= k_{21} = \sqrt{q/b_0}; \quad k_{11} = a_1 k_{21} + k_{12} k_{22} b_0^2 / q; \\ k_{22} &= [a_1^2 q^2 / b_0'' + (2k_{21} + \alpha) q / b_0^2]^{1/2} - a_1 q / b_0^2.\end{aligned}$$

Передаточная функция оптимальной системы стабилизации

$$W_{30} = \frac{k_0 W_0(p)}{1 + k_0 (k_{21} + k_{22} p)},$$

где $k_0 = b_0 / q$.

Найдем оптимальное управление для задачи слежения при входном сигнале $x(t) = 1(t) - 1(t - T)$. Оптимальное управление определяется выражениями (13.9) и (13.15):

$$u(t) = -[k_{21} g_1(t) + k_{22} g_2(t)] \frac{b_0}{q} + z_2(t) \frac{b_0}{q}.$$

Параметр $z_2(t)$ рассчитан в соответствии с (13.15) из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= b_0^2 z_2(t) k_{21} / q + x_1(t); \\ \dot{z}_2(t) &= -x_1(t) + (k_{22} b_0^2 / q - a_1) z_2(t) + \alpha x_2(t),\end{aligned}$$

где $x_1(t) = 1(t - T)$; $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = 0$.

На рис. 13.2 показана структурная схема спроектированной системы, для вычисления $z_2(t)$ которой включено вычислительное устройство. Передаточную функцию этого устройства определим из последней системы уравнений:

$$W_d(p) = -\frac{1}{p^2 + c_1 p + c_0},$$

где $c_1 = a_1 - k_{22} b_0^2/q$; $c_0 = k_{21} b_0^2/q$.

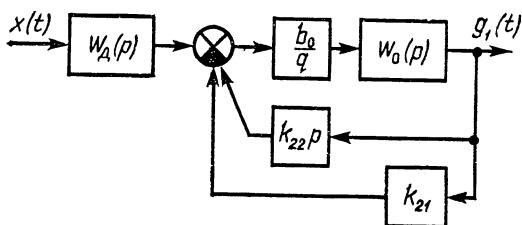


Рис. 13.2. Структурная схема оптимальной системы второго порядка

В оптимальных системах стабилизации и слежения, рассмотренных ранее, полагали, что вектор состояния объекта управления полностью известен, т. е. его можно измерить с помощью соответствующих датчиков. В действительности это нереально. Обычно можно измерить только часть переменных состояния или какое-либо их сочетание, при этом измерения содержат случайные ошибки. Кроме того, сама система, как правило, подвержена воздействию случайных возмущений. Таким образом, для формирования оптимального управления необходимо предварительно оценить вектор состояния, что может быть сделано при построении математической модели объекта управления.

Для объекта управления, описываемого уравнениями (13.3) оценку состояния можно осуществить в соответствии с математической моделью

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (13.17)$$

где $\hat{\mathbf{G}}(t)$ — оценка вектора состояния

Если начальные значения векторов $\mathbf{G}(0)$ и $\hat{\mathbf{G}}(0)$ равны, то в любой момент времени $\hat{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{G}(t)$. Однако точное значение $\hat{\mathbf{G}}(0)$ получить невозможно, поэтому оценка $\hat{\mathbf{G}}(t)$ по модели (13.17) дает большие ошибки. Для устранения этого недостатка на вход оценивателя состояния

кроме сигнала $U(t)$ подают сигнал рассогласования $Y(t) - C^T G(t)$, а вместо уравнения (13.17) используют уравнение

$$\dot{\hat{G}}(t) = A \hat{G}(t) + L[Y(t) - C^T \hat{G}(t)] + BU(t) \quad (13.18)$$

или

$$\dot{\hat{G}}(t) = [A - LC^T] \hat{G}(t) + LY(t) + BU(t), \quad (13.19)$$

где L — вектор усиления оценщика размером $n \times m$; m — размерность выходного вектора.

Составляющие вектора L выбирают такими, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [G(t) - \hat{G}(t)] = 0. \quad (13.20)$$

Если собственные значения матрицы $[A - LC^T]$ в (13.20) выбрать так, чтобы их вещественные части были отрицательными, то при любых начальных значениях $\hat{G}(0)$ обеспечивается выполнение (13.20).

После того как найдена оценка вектора состояния объекта управления, можно использовать алгоритм управления, полученный в задачах оптимальной стабилизации и слежения. На рис. 13.3 показана полная структурная схема оптимальной системы стабилизации с оценива-

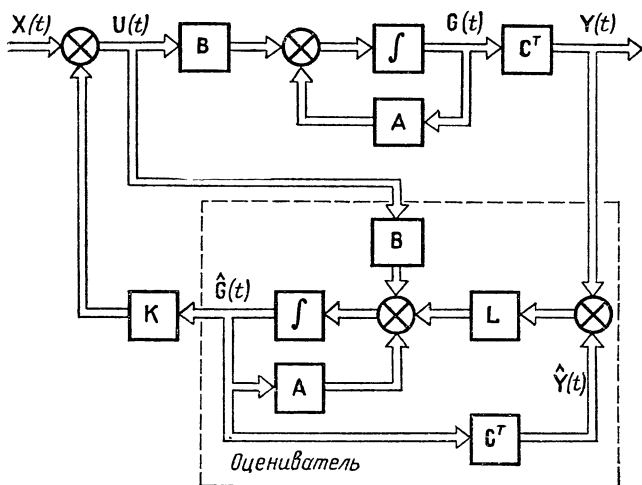


Рис. 13.3. Полная структурная схема оптимальной системы стабилизации

телем вектора состояния и обратной связью. Оценитель построен в соответствии с уравнением (13.18). Сравнение этого уравнения с (11.58) показывает, что оценщик — это оптимальный фильтр Калмана, характеристики которого зависят от динамических свойств объекта управления и помех, но не зависят от критерия оптимальности системы управления.

Оценка состояния и оптимальное управление по квадратичному функционалу (13.4) представляет собой двойственную дуальную задачу. Если одна из них решена, то в соответствии с принципом дуальности нетрудно решить и другую. Поэтому при решении задач фильтрации и детерминированного управления могут использоваться одни и те же программы для ЭВМ.

§ 13.3. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Проектирование систем РА при неопределенности изменения внешних условий (характеристик объектов управления и внешних воздействий) приводит к необходимости использования адаптивных систем, в которых для достижения оптимального критерия качества работы и поддержания его на этом уровне согласно измерениям внешних условий изменяются параметры и структурная схема системы. В результате система как бы приспосабливается к изменению внешних условий, при этом сохраняя оптимальный режим работы. Адаптивные системы, в которых оптимальный режим поддерживается только за счет регулировки параметров системы при сохранении ее структуры, называют *самонастраивающимися* (СНС). Если оптимальный режим поддерживается и за счет изменения структуры системы, то системы называют *самоорганизующимися*.

Оптимальные значения параметров устройства управления СНС определяются путем аналитического анализа или за счет использования специальных пробных сигналов, относительно которых оценивается критерий качества работы и организуется соответствующая перестройка параметров устройства управления. СНС первого типа называют *аналитическими*, второго — *поисковыми*. Различают также СНС с *настройкой по внешним воздействиям и по характеристикам объекта управления*.

На рис. 13.4 показана обобщенная структурная схема СНС, которая состоит из основного контура, работающего по принципу отклонения, и устройства адаптации

(УА), предназначенного для целенаправленного изменения характеристик устройства управления (УУ). В УА анализируется соответствие критерия качества заданному (оптимальному) значению, в результате чего вырабаты-

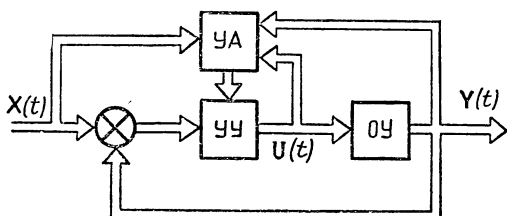


Рис. 13.4. Обобщенная структурная схема СНС

тываются сигналы для изменения настраиваемых параметров УУ.

Заметим, что синтез систем без устройств адаптации осуществляется методами, приведенными ранее. Этот этап называют *первичным синтезом СНС*, а проектирование устройств самонастройки — *вторичным синтезом СНС*.

Рассмотрим СНС с настройкой по внешним воздействиям, структурная схема которой является частным случаем обобщенной (рис. 13.5). В таких системах оптимальный режим обеспечивается за счет измерения характеристик внешних воздействий. В УА решается задача оценки параметров входного сигнала и формируется алгоритм самонастройки, обеспечивающий оптимизацию критерию качества работы системы. Обычно критерием является квадрат суммарной ошибки

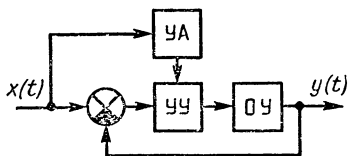


Рис. 13.5. Структурная схема СНС с настройкой по внешним воздействиям

$$J = \sigma^2(t) = e_d^2(t) + \sigma_e^2(t), \quad (13.21)$$

где e_d — динамическая ошибка; σ_e^2 — дисперсия ошибки относительно случайных составляющих воздействий.

При анализе таких СНС полагают, что число произ-

водных от сигнала $x(t)$ ограничено, а характеристики случайных воздействий известны с точностью до параметров. Кроме того, считают, что изменение параметров воздействий происходит намного медленнее по сравнению с переходными процессами в СНС. При таких предположениях для анализа СНС можно использовать методы, изложенные в гл. 6. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 13.2. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид $W_p(p) = K(1 + pT)/p^2$. На вход замкнутой системы поступает сигнал $x(t) = \alpha_2 t^2/2$ и действует помеха с известной спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$. Найти $K(t)$ для оптимальной системы в смысле минимума (13.21).

Решение. Применяя формулы (6.13) и (6.21), найдем, что $\sigma^2 = \ddot{x}^2/k^2 + N_n(1 + kT^2)/(2T)$.

Оптимальное значение коэффициента усиления, соответствующее минимуму (13.21), вычислим из условия

$$\partial \sigma^2 / \partial K^2 = -2 \ddot{x}^2 / K_0^4 + N_n T / 2 = 0,$$

откуда $K_0^3 = 4 \ddot{x}^2 / (N_n T)$.

Таким образом, в УА (рис. 13.5) должна вычисляться вторая производная сигнала $\ddot{x}(t)$ и значение коэффициента усиления K_0 , которое следует установить в УУ системы. Оптимальный коэффициент усиления K_0 может быть рассчитан заранее и помещен в память. В процессе работы системы по измеренному значению $\ddot{x}(t)$ в УУ устанавливают нужное значение K_0 .

При выборе структуры УА возможны и другие два подхода. В первом настраиваемые параметры изменяются так, чтобы скомпенсировать отклонение критерия качества от заданного значения и сохранить его на требуемом уровне. Во втором подходе параметры объекта управления и внешних воздействий идентифицируются. Связь этих параметров с регулируемыми параметрами УУ системы известна и реализуется в УА, в результате чего и достигается адаптация критерия качества к изменению внешних условий.

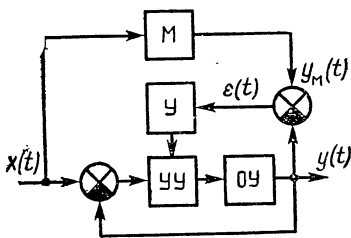


Рис. 13.6. Структурная схема СНС с эталонной моделью

Системы, в которых реализуется первый подход (без идентификации характеристик внешних воздействий и объекта управления), называют *СНС с эталонными*

моделями, а системы, реализующие второй подход, — СНС с настраиваемой моделью или адаптивными системами с идентификатором.

На рис. 13.6 показана структурная схема СНС с эталонной моделью. Сигнал отклонения $\varepsilon(t)$, равный разности сигналов с модели $y_m(t)$ и с выхода системы $y(t)$, является входным сигналом цепи самонастройки (ЦС), с помощью которой производится изменение параметров УУ, устраняющее рассогласование $\varepsilon(t)$. Из схемы рис. 13.6 видно, что ЦС образует в СНС замкнутый контур, устойчивость которого влияет на устойчивость всей СНС. Для проверки устойчивости СНС используют прямой метод Ляпунова, в соответствии с которым ограниченное значение $\varepsilon(t)$ свидетельствует об устойчивости СНС. Познакомимся с этим методом на конкретном примере.

Пример 13.3. Система в разомкнутом состоянии описывается уравнением

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = k_0(t) k_y e(t), \quad (13.22)$$

где a_0, a_1 — постоянные коэффициенты; $k_0(t)$ — коэффициент передачи объекта управления; k_y — регулируемый коэффициент усиления УУ.

Уравнение модели имеет вид

$$\ddot{y}_m(t) + a_1 \dot{y}_m(t) + a_0 y_m(t) = k_m e(t). \quad (13.23)$$

Найти алгоритм для регулируемого коэффициента усиления УУ и условие устойчивости СНС.

Решение. Вычтя из (13.23) уравнение (13.22), получим

$$\ddot{\varepsilon}(t) + a_1 \dot{\varepsilon}(t) + a_2 \varepsilon(t) = b_0(t) e(t), \quad (13.24)$$

где $b_0 = k_m - k_0(t) k_y$.

Перепишем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1(t) &= \varepsilon_2(t) \varepsilon_1 + a_0 \varepsilon(t); \\ \dot{\varepsilon}_2(t) &= -a_0 \varepsilon_1(t) - a_1 \varepsilon_2(t) + b_0(t) e(t). \end{aligned} \quad (13.25)$$

Выберем функцию Ляпунова следующим образом:

$$V = a_0 \varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) + b_0^2(t). \quad (13.26)$$

Полная производная от функции Ляпунова (13.26):

$$dV/dt = 2[a_0 \varepsilon_1(t) \dot{\varepsilon}_1(t) + \varepsilon_2(t) \dot{\varepsilon}_2(t) + b_0(t) \dot{b}_0(t)]$$

или с учетом выражений (13.25):

$$dV/dt = 2[-a_1 \varepsilon_2^2(t) + b_0(t) [\varepsilon_2(t) e(t) + \dot{b}_0(t)]]. \quad (13.27)$$

В соответствии с прямым методом Ляпунова, если dV/dt оказывается знакоопределенной функцией противоположного знака по сравнению с V , то система асимптотически устойчива и отклонения $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ стремятся к нулю. В рассматриваемом примере это

условие выполняется, если

$$\dot{b}_0(t) = -\varepsilon_2(t) e(t). \quad (13.28)$$

Представим $k_0(t)$ в виде $k_0(t) = k + \Delta k_0(t)$, где k_0 — постоянное номинальное значение коэффициента передачи; $\Delta k_0(t)$ — его переменная составляющая, изменение которой происходит медленно по сравнению с процессом самонастройки, поэтому его производную на интервале времени самонастройки можно принять равной нулю. Тогда из выражений (13.24) и (13.28) следует, что $\dot{k}_y = \varepsilon_2(t) e(t) / k_0$, или

$$k_y = \frac{1}{k_0} \int_0^t \varepsilon_2(t) e(t) dt. \quad (13.29)$$

На рис. 13.7 приведена структурная схема СНС, соответствующая алгоритму самонастройки (13.29).

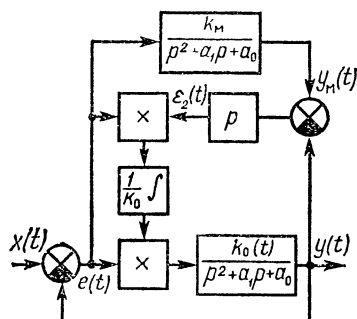


Рис. 13.7. Структурная схема СНС второго порядка

В рассмотренном примере в качестве критерия оптимальности приближение выходного сигнала системы $y(t)$ к $y_m(t)$. Помимо такого критерия наиболее часто используются зависимости вида

$$J = \varepsilon^2(t); \quad J = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt. \quad (13.30)$$

В таких случаях синтез цепи самонастройки осуществляется следующим образом. На основании измеренного отклонения $\varepsilon(t)$ сигналов на выходе модели и системы и выбранного критерия вторичной оптимизации цепи самонастройки определяются требуемые значения параметров УУ, которые и устанавливаются в системе. Для реализации такого принципа самонастройки обычно применяют *градиентный метод*, в соответствии с которым необходимо найти градиент, определяемый выражением

$$\nabla J = [\partial J / \partial c_1, \partial J / \partial c_2, \dots, \partial J / \partial c_m], \quad (13.31)$$

где c_i — регулируемые параметры УУ, число которых равно m .

Выходной сигнал системы запишем в виде

$$y(t) = W_s(p, \mathbf{C}, \mathbf{B}) x(t); \quad p = d/dt. \quad (13.32)$$

где $\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_m]$ — вектор регулируемых параметров

УУ; \mathbf{B} — вектор неконтролируемых параметров объекта управления.

Эталонная модель описывается уравнением, по форме совпадающим с (13.32).

В соответствии с градиентным методом скорость изменения регулируемых параметров УУ пропорциональна составляющим вектора градиента (13.31):

$$\partial c_i / \partial t = - \gamma_i \partial J / \partial c_i, \quad (13.33)$$

где γ_i — постоянный коэффициент.

Критерий оптимальности (13.30) является функцией $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$, поэтому выражение (13.33) можно представить в виде

$$\partial c_i / \partial t = \gamma_i \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial c_i}. \quad (13.34)$$

Сомножитель $\partial J / \partial \varepsilon$ при выбранном критерии оптимальности известен, второй сомножитель, как показано в [21], можно найти по формуле

$$\frac{\partial y}{\partial c_i} = \frac{\partial W_y}{\partial c_i} \frac{1 - W_m}{W_y}, \quad (13.35)$$

где $W_y(p, \mathbf{C})$ — оператор УУ.

Подставив (13.35) в (13.34), найдем алгоритм цепи самонастройки:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \gamma_i \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \frac{\partial W}{\partial c_i} \frac{1 - W_m}{W_y}. \quad (13.36)$$

В поисковых СНС для оптимизации критерия качества применяются специальные поисковые сигналы. Рассмотрим основные методы поиска экстремума, полагая, что функция J унимодальна, т. е. имеет один экстремум. Для конкретности будем полагать, что экстремумом является минимум, необходимым условием которого является равенство нулю градиента (13.31). Если при каком-то значении вектора \mathbf{C} градиент $J \neq 0$, то это означает, что минимум не достигнут и нужно изменить вектор \mathbf{C} так, чтобы J уменьшалось. Таким образом, поиск минимума состоит из двух этапов: определение градиента и организации движения в направлении минимума. При использовании для поиска метода градиента скорость изменения составляющих вектора пропорциональна составляющим градиента (13.33). Так как градиент измеряется непрерывно, то скорости изменения составляющих вектора \mathbf{C} в любой момент времени пропорциональны градиенту. Если при этом $\partial c_i / \partial t$ неположительна, то

градиент J уменьшается и при каком-то значении \mathbf{C} достигает минимума.

Если для поиска применяют цифровые ЭВМ, то используют дискретный метод, в соответствии с которым составляющие вектора \mathbf{C} на каждом последующем шаге принимаются следующими:

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{C}_n - \gamma \nabla J(\mathbf{C}). \quad (13.37)$$

Вычисления по формуле (13.37) производят до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$J(\mathbf{C}_{k+1}) > J(\mathbf{C}_k), \quad (13.38)$$

что соответствует достижению минимума, равного $J(\mathbf{C}_k)$.

Кроме метода градиента поиск экстремума осуществляют *методом наискорейшего спуска*, согласно которому скорость изменения вектора \mathbf{C} берется пропорциональной градиенту в точке \mathbf{C}_0 :

$$\partial \mathbf{C} / \partial t = - \gamma \nabla J(\mathbf{C}_0). \quad (13.39)$$

Изменение вектора с этой скоростью происходит до тех пор, пока при каком-то значении \mathbf{C}_1 не будет удовлетворяться условие $\partial J / \partial t = 0$, после чего находят градиент в точке \mathbf{C}_1 и вычисления повторяют.

В дискретной форме алгоритм наискорейшего спуска имеет вид

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{C}_n - \gamma \nabla J(\mathbf{C}_0). \quad (13.40)$$

Вычисления производят до тех пор, пока не будет выполнено условие (13.38). В найденной точке \mathbf{C}_k снова определяют градиент, после чего начинают второй цикл, при этом вместо \mathbf{C}_0 в (13.40) подставляют \mathbf{C}_k . Подобные циклы продолжают до тех пор, пока не будет достигнут минимум J , фиксируемый по какому-либо правилу, например, когда модуль разности J на законченном в предыдущих циклах не превосходит заданного значения.

В рассмотренных методах при поиске экстремума изменяются одновременно все аргументы функции J , что затрудняет реализацию алгоритмов. Процедуру поиска можно упростить, если при начальном значении c_0 изменять только составляющую c_1 до тех пор, пока J не достигнет экстремального значения. После этого следует осуществить аналогичное изменение c_2 до достижения экстремума и т. д. до c_m , затем весь цикл поиска повторяется, начиная с c_1 до выполнения условия $\Delta J = 0$ или (13.38) в дискретном варианте. Этот метод поиска экстремума функции J называют *методом Гаусса—Зайделя*.

Изложенные методы поиска применяют в СНС, когда известен конкретный вид функции J . Во многих СНС функции J в явной форме неизвестна, но могут измеряться ее значения, по которым и находят составляющие градиента. В таких системах помимо метода численного дифференцирования, связанного с использованием ЭВМ, применяется *метод синхронного детектирования*. В соответствии с этим методом составляющие вектора \mathbf{C} получают приращения в виде поисковых сигналов $\delta c_i(t)$, в результате чего функция J принимает вид $J(c_1 + \delta c_1(t), \dots, c_m + \delta c_m(t))$. Разложим эту функцию в ряд Тейлора, ограничься квадратичными членами, и умножим на $\delta c_i(t)$. В результате получим

$$v_i = \left[J(c) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial J(c)}{\partial c_i} \delta c_i(t) + \frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{j,k} \frac{\partial^2 J(c)}{\partial c_j \partial c_k} \delta c_j(t) \delta c_k(t) \right] \delta c_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (13.41)$$

Усредненное значение функции (13.41):

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \int_0^T v_i(t) dt, \quad (13.42)$$

где T — время усреднения.

В качестве поисковых сигналов выбирают гармонические воздействия

$$\delta c_i(t) = B \sin \omega_i t; \quad \omega_i = (2i + 1) \Omega = \text{const}; \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Так как

$$\int_0^T \delta c_i(t) dt = 0, \quad \int_0^T \delta c_i(t) \delta c_j(t) \delta c_k(t) dt = 0, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \delta c_i(t) \delta c_j(t) dt = \begin{cases} B^2/2 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то выражение (13.42) принимает вид

$$\bar{v}_i = \frac{\partial J}{\partial c_i} \frac{B^2}{2},$$

т. е. значения \bar{v}_i пропорциональны i -м составляющим градиента.

Для аппаратной реализации этого способа определения градиента необходим генератор гармонических колебаний, умножитель и фильтр, усредняющий сигналы u_i . Устройство, состоящее из умножителя и сглаживающего фильтра, называют *синхронным детектором*.

На рис. 13.8 приведена структурная схема СНС с эталонной моделью, в которой составляющие градиента

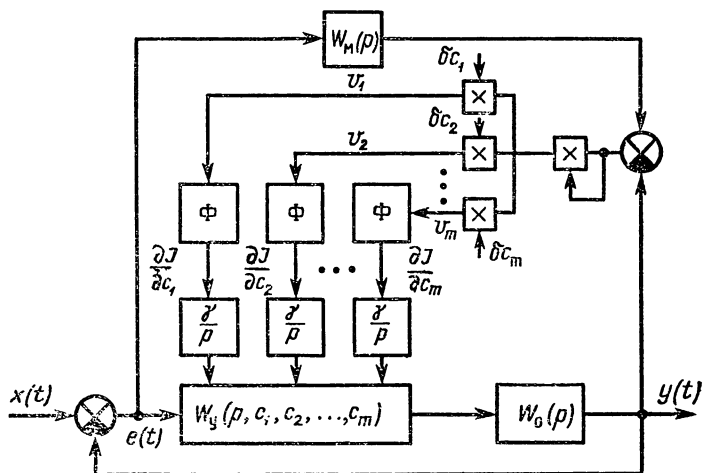


Рис. 13.8. Структурная схема СНС с синхронным детектированием

определяются по методу синхронного детектирования. Сигнал ошибки системы $e(t)$ подают на эталонную модель, сигнал рассогласования в цепи самонастройки $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$ возводится в квадрат и поступает на умножители, на вторые входы которых подаются поисковые колебания $\delta c_i(t)$, частоты колебаний которых намного больше полосы пропускания системы. Сигналы с умножителей поступают на усредняющие фильтры (Φ) с коэффициентом передачи $2/B^2$. В результате на выходах фильтров вырабатываются сигналы, пропорциональные составляющим градиента J . Эти составляющие интегрируются, выходные сигналы интеграторов определяют параметры устройства управления, которые изменяются до тех пор, пока составляющие градиента не обратятся в нуль, что соответствует приближению $y(t)$ к $y_m(t)$, с минимальной средней квадратической ошибкой.

Число регулируемых параметров устройства управления m выбирается таким, чтобы обеспечить достаточное приближение передаточной функции разомкнутой системы к $W_m(p)$.

§ 13.4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В радиотехнических устройствах экстремальные системы применяются в тех случаях, когда необходимо чтобы какой-либо параметр соответствовал экстремальному значению. Например, часто требуется, чтобы собственная частота какого-либо колебательного устройства отслеживала изменение частоты сигнала.

Особенностью экстремальных систем является экстремальная характеристика (с явным минимумом или максимумом) объекта управления, которая зависит от входных сигналов и в процессе работы может изменяться непредвиденным образом, сохраняя при этом экстремальный вид. Задача управления состоит в том, чтобы сигналы на входе объекта управления обеспечивали его работу в экстремальном режиме.

Критерий оптимальности в системах определяется не выбранным функционалом, а свойствами объекта управления. Это является основным отличием экстремальных систем от оптимальных, рассмотренных в § 13.3.

На практике наибольшее распространение нашли одномерные экстремальные системы с показателями качества работы $y=f(u, g)$, где $g(t)$ — возмущающее воздействие. В таких системах осуществляются две операции: 1) выявление отклонения текущего значения $y(t)$ от экстремального значения; 2) организация изменения сигнала управления $u(t)$ для перевода объекта управления в экстремальный режим работы. Первая операция является поисковой, вторая — рабочей.

В зависимости от способа поиска экстремума различают следующие типы экстремальных систем: *с определением производной, с определением знака производной, шаговые, с запоминанием экстремума*. Существуют также системы с поисковыми сигналами и без них.

На рис. 13.9 показана обобщенная структурная схема экстремальной системы, которая отличается от обычной наличием устройства поискового элемента (УПЭ); через ЛЧ на схеме обозначена линейная часть объекта управления.

В системах с определением производной УПЭ форми-

рует сигнал $\varepsilon(t) = k_0 s$, где k_0 — постоянный коэффициент; $s = dy/du$ — производная от экстремальной характеристики объекта управления. Из-за операции дифференцирования такие системы чувствительны к помехам. Этого недостатка не имеют экстремальные системы, где в УПЭ определяется не производная, а только ее знак.

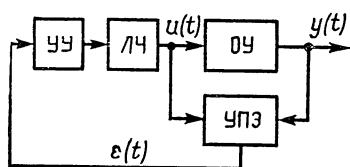


Рис. 13.9. Обобщенная структурная схема экстремальной системы

производная имеет отрицательный знак, то на экстремальной характеристике рабочая точка находится справа от максимума (слева от минимума, а если положительный, то слева от максимума (справа от минимума)). В таких системах $\varepsilon(t) = k_0 \text{sign } s$, т.е. система является релейной.

В шаговых экстремальных системах через определенные интервалы времени в УПЭ измеряются и фиксируются в запоминающем устройстве выходные сигналы объекта управления. Затем эти сигналы, измеренные в начале и конце интервала, сравниваются. Если оказывается, что выходной сигнал объекта управления уменьшился, то при движении к максимуму, изменяется на противоположный знак сигнала управления (не изменяется при движении к минимуму) и наоборот. Шаг интервала времени выбирается в зависимости от изменений экстремальной характеристики из-за внешних условий и систем защиты от помех. Для защиты от помех шаг следует выбирать как можно большим; при этом ухудшается качество слежения за изменениями экстремума.

В системах с запоминанием экстремума УПЭ содержит блок памяти, который запоминает большие по сравнению с записанными ранее значения y (в системах с максимумом), т.е. запоминание происходит только при увеличении y . Сигналы с выхода объекта управления и запоминающего устройства сравниваются и, если максимум не достигнут, то их разность оказывается равной нулю. При достижении или переходе экстремальной точки сигнал на выходе объекта управления уменьшается, а сигнал с запоминающего устройства сохраняет экстремальное значение, поэтому происходит изменение знака сигнала управления, что обеспечивает движение в точке экстремума.

Поиск экстремума может быть выполнен с помощью специальных поисковых колебаний, когда объект управления допускает такой режим работы. На рис. 13.10 изображена экстремальная характеристика объекта управления, на которой действует поисковый сигнал. Если сигналу управления соответствует точка 1 экстремальной характеристике, то на выходе объекта управления создается сигнал той же частоты, совпадающий по фазе с поисковым сигналом. Если сигналу управления соответствует точка 2 экстремальной характеристики, то сигнал на выходе объекта управления будет иметь противоположную фазу. Таким образом, фаза сигнала на выходе объекта управления определяет положение рабочей точки относительно экстремума характеристики. На рис. 13.11 показана структурная схема одномерной экстремальной системы, в которой для индикации фазы используется синхронный детектор. Поисковые колебания $\delta u = B \sin \omega t$ создаются генератором поисковых колебаний (ГПК). Так же, как и в системах на рис. 13.8, вычисляется градиент dy/du . В зависимости от знака градиента с релейного элемента (РЭ) поступает напряжение того или иного знака, в результате чего исполнительное устройство (ИУ) осуществляет движение к точке экстремума. В рассматриваемой системе усредняющий фильтр можно исключить, возложив его функции на исполнительное устройство.

Основным режимом работы экстремальных систем является колебательный относительно экстремального значения. Поэтому качество работы этих систем оценивается следующими показателями; наибольшим отклонением сигнала u от его экстремального значения, периодом колебаний T и средним значением отклонения выходного сигнала от экстремального значения, называемым потерями на поиск (рысканье).

Рассмотрим методику оценки качества работы экстремальных систем с дифференцированием, полагая, что объект управления является безынерционным. Устройством управления в такой системе служит релейный элемент с порогом срабатывания ε_0 , исполнительным устройством является интегрирующее звено. Уравнение переключения исполнительного устройства, определяющее отклонение u от экстремального значения, имеет вид $\frac{d}{dt} y[u(t)] = \varepsilon_0$. Так как в рассматриваемой системе $\dot{u} = \pm c$, то уравнение переключения получается следую-

щим: $\pm c dy/du = \varepsilon_0$. При аппроксимации экстремальной характеристики зависимостью $y = ku^2$, уравнение переключения принимает вид $\pm 2cku = \varepsilon_0$, следовательно,

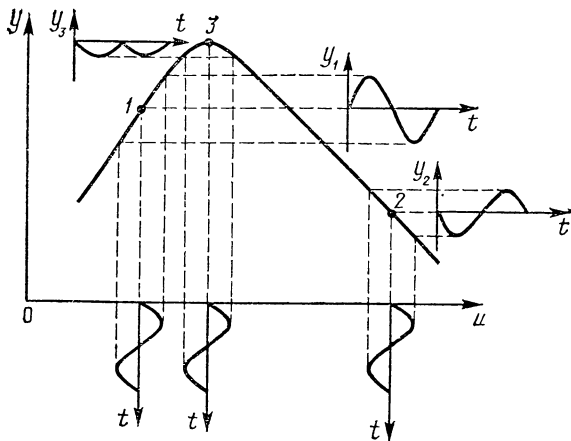


Рис 13.10. Экстремальная характеристика объекта управления

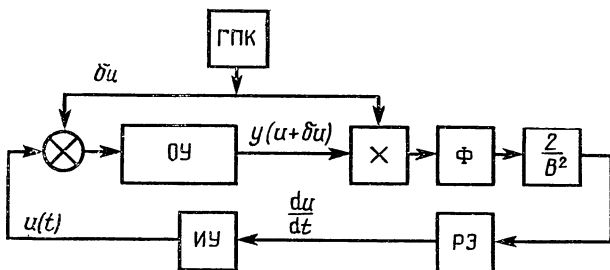


Рис. 13.11. Структурная схема одномерной экстремальной системы

$|u_{\max}| = \varepsilon_0 / (2kc_0)$. Период колебаний — время, за которое сигнал u изменяется от u_{\max} до u_{\min} и снова до u_{\max} : $T_k = (2\varepsilon_0) / (kc^2)$. Потери на поиск определяются выражением

$$R = \frac{1}{u_{\max} - u_{\min}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} [y(u) - y(\bar{u})] du = \varepsilon^2 / (12kc^2),$$

где $y(\bar{u})$ — экстремальное значение сигнала, равное нулю в рассматриваемом случае.

В [15] даны оценки качества работы экстремальных систем других типов.

§ 13.5. ВИДЫ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

Адаптивная система управления амплитудным распределением в антенной решетке. Такая система (рис. 13.12) предназначена для подавления сигналов и помех,

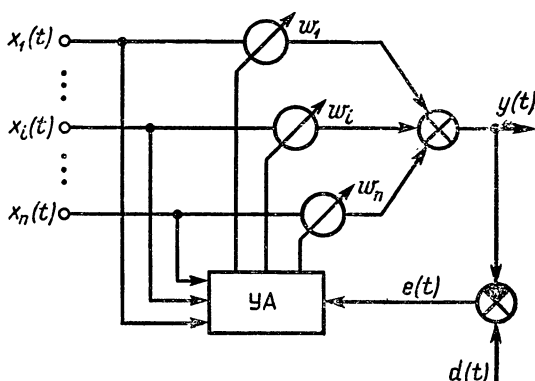


Рис. 13.12. Структурная схема адаптивной системы управления с амплитудным распределением в антенной решетке

приходящих с направлений, отличных от направления главного лепестка диаграммы направленности. Система состоит из антенных элементов, на вход каждого из которых поступает аддитивная смесь сигнала $x_i(t)$ и помехи $v_i(t)$. Выходные сигналы антенных элементов суммируются и образуют выходной сигнал антенной решетки:

$$y(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t), \quad (13.43)$$

где $\mathbf{W}^T = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ — вектор весовых коэффициентов; $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ — вектор входных сигналов; n — число антенных элементов в решетке.

В устройстве адаптации (УА) осуществляется оптимальная весовая обработка принятых сигналов. В качестве критерия оптимальности могут использоваться различные величины: минимум средней квадратической

ошибки, максимальное отношение мощности сигнала к мощности помех и др. Найдем алгоритм адаптации цифрового УА при использовании критерия минимума средней квадратической ошибки. В этом случае ошибка $e(j) = d(j) - y(j)$, где $d(j)$ — желаемый выходной сигнал. С учетом выражения (13.43) средняя квадратическая ошибка получается следующей:

$$J = M [e^2(t)] = M [d^2] + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_x \mathbf{W} - 2\mathbf{W}^T \mathbf{R}_{dx},$$

где $\mathbf{R}_x = M[\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^T(j)]$, $\mathbf{R}_{dx} = M[d(j)\mathbf{X}^T(j)]$ — матрицы корреляционных моментов.

Градиент J при минимальном значении среднеквадратической ошибки $\nabla J = 2\mathbf{R}_x \mathbf{W} - 2\mathbf{R}_{dx} = 0$. Из этого условия находят оптимальный вектор весовых коэффициентов: $\mathbf{W}_0 = -\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx}$. Это выражение является уравнением Винера для рассматриваемой задачи, решение которого связано со значительными трудностями из-за большого объема вычислений \mathbf{R}_x и ее обращения. Поэтому для поиска оптимального вектора \mathbf{W}_0 целесообразно использовать метод наискорейшего спуска (13.40), в соответствии с которым

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \gamma \nabla J(j).$$

Градиент единичного отсчета вычисляют по формуле

$$\nabla J(j) = \nabla [e^2(t)] = 2e(j) \nabla [e(j)] = -2e(j) \mathbf{X}(j).$$

Таким образом, алгоритм адаптации имеет вид

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + 2\gamma e(j) \mathbf{X}(j).$$

Реализация этого алгоритма сводится к суммированию текущего значения весового коэффициента с входным сигналом, умноженным на ошибку.

Быстродействие процесса адаптации зависит от собственных значений λ_i матрицы \mathbf{R}_x . Переходный процесс адаптации является суммой экспонент с постоянными времени $T_i = 1/(2\gamma\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В рассматриваемой системе необходимо знать желаемый выход $d(j)$, который формируется так, чтобы его характеристики были аналогичными принимаемому сигналу.

Адаптивный фазовый суммарно-разностный пеленгатор. Выходное напряжение такого пеленгатора (см. рис. 3.8) определяется формулой (3.11). С учетом неустойчивости параметров суммарного и разностного каналов эта

формула принимает вид

$$u_{\text{фд}} = k_{\text{фд}} \frac{k_p}{k_c} \frac{(1 - g^2) \sin \alpha + 2g \sin(\Delta\varphi + \psi) \cos \alpha}{1 + g^2 + 2g \cos(\Delta\varphi + \psi)},$$

где k_p , k_c — коэффициенты усиления разностного и суммарного каналов; g — отношение коэффициентов усиления высокочастотных каналов; ψ — фазовая неидентич-

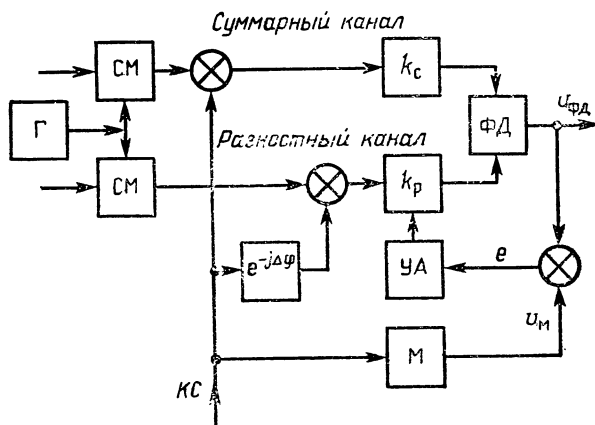


Рис. 13.13. Структурная схема адаптивного пеленгатора

ность высокочастотных каналов; α — фазовая неидентичность суммарного и разностного каналов.

В том случае, когда $g=1$ и $\psi=0$,

$$u_{\text{фд}} = k \operatorname{tg} \Delta\varphi/2; \quad k = k_{\text{фд}} k_p \cos \alpha / k_c.$$

На рис. 13.13 показана структурная схема адаптивного пеленгатора, обеспечивающая компенсацию ошибок, возникающих из-за неидентичности суммарного и разностного каналов. Достигается это следующим образом. Измеряется ошибка отклонения сигнала на выходе пеленгатора от желаемого значения. С этой целью в состав адаптивного пеленгатора включена модель, на вход которой подается контрольный сигнал (КС), этот же сигнал подается в суммарный канал и с запаздыванием на $\Delta\varphi$ в разностный. На выходе модели по контрольному сигналу формируется желаемый сигнал пеленгатора. По измеряемой ошибке и выходному сигналу пеленгатора в устройстве адаптации (УА) создается сигнал, под дей-

ствием которого изменяется коэффициент усиления разностного канала k_p , за счет чего и достигается компенсация влияния неустойчивости коэффициента k на точность работы пеленгатора.

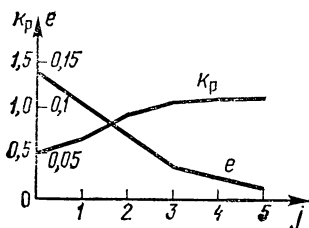


Рис. 13.14. Графики, иллюстрирующие процессы адаптации при различных значениях неустойчивости суммарного и разностного каналов

Определим алгоритм адаптации при цифровом способе его реализации. В качестве критерия качества работы пеленгатора примем минимум средней квадратической ошибки: $J = M[e^2(j)]$, где $e(j) = u_k(j) - u_{fd}(j) = (k_0 - k) \operatorname{tg} \Delta\varphi/2$; $u_m(j) = k_0 \operatorname{tg} \Delta\varphi/2$. Градиент функции по коэффициенту k $\nabla J = -2e(j) \operatorname{tg} \Delta\varphi/2$, т. е. равен произведению ошибки и сигнала на выходе модели. Поэтому алгоритм адаптации с методом наискорейшего спуска (13.40) получается следующим: $k_p(j+1) = k_p(j) +$

$+2\gamma e(j)u_m(j)$. На рис. 13.14 показаны графики, иллюстрирующие процессы адаптации при различных значениях неустойчивости суммарного и разностного каналов.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 13

1. Сформулируйте постановку задачи синтеза оптимальных систем.
2. Какие критерии оптимальности применяются при проектировании систем?
3. Каким образом находится оптимальное управление в задачах стабилизации и слежения?
4. Поясните принцип дуальности в оптимальных системах.
5. Какие системы относятся к адаптивным?
6. Поясните принцип работы СНС с эталонной моделью.
7. Какие методы поиска используются в адаптивных системах?
8. В чем главное отличие экстремальных систем от оптимальных?
9. Перечислите типы экстремальных систем.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ****§ 14.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ**

Моделирование является важным этапом проектирования систем РА. Оно позволяет провести исследования сложных систем, которые не могут быть выполнены традиционными методами. Кроме того, моделирование существенно сокращает сроки проектирования и за счет анализа большого числа вариантов системы повышает его качество. Важно отметить, что многие режимы работы систем РА могут быть исследованы только с помощью моделирования (например, оценка качества функционирования систем радиоуправления летательными аппаратами).

Различают физическое, математическое и полунатурное моделирование.

Физическое моделирование базируется обычно на принципе электрофизических аналогий между исследуемой системой и ее моделью в виде некоторого объекта, который описывается теми же математическими соотношениями, что и исследуемая система. В настоящее время этот метод моделирования для систем РА применяется редко.

При *математическом моделировании* в ЭВМ реализуются математические зависимости, описывающие процессы в системе РА, а также алгоритмы внешних воздействий, и способов оценки качества функционирования системы.

При *полунатуральном моделировании* в состав моделирующей установки системы РА включают макеты или оригиналы отдельных подсистем или устройств реальных систем, что позволяет наиболее полно учесть влияние их характеристик на свойства исследуемой системы.

Математической моделью какой-либо системы называют формализованное математическое описание системы, отражающее с требуемой точностью процессы, происходящие в исследуемой системе. При разработке математической модели можно использовать два подхода. Первый подход (аналитическое моделирование) заключается в составлении и реализации на ЭВМ алгоритмов, расчетных формул с целью анализа структуры и показателей качества работы системы: переходных процессов, частот-

ных характеристик, динамической и средней квадратической ошибки, оптимальных параметров и т. п. Второй подход состоит в том, что при разработке модели и ее реализации на ЭВМ процессы, происходящие в модели и реальной системе, оказываются одинаковыми. Такой метод моделирования называют *имитационным*. В настоящее время этот метод широко применяется для моделирования систем РА. Это объясняется тем, что имитационная модель может быть составлена практически для любой системы, в нее легко вносить изменения, в ней проще по сравнению с аналитической моделью учесть влияние изменения параметров на свойства моделируемой системы, оценить динамические диапазоны сигналов в устройствах системы.

Исходными данными для разработки имитационной модели являются математические соотношения, описывающие процессы в отдельных устройствах системы РА, схемы их соединений, алгоритмы оценки устойчивости и качества работы, а также характеристики детерминированных и случайных воздействий и окружающей среды.

С точки зрения математического описания процессов преобразования сигналов в различных устройствах систем РА можно выделить три основных вида преобразований: безынерционное, инерционное и нелинейное. При этом основной характеристикой является вид — преобразование сигнала. Сложные преобразования представляют как сочетание трех основных видов преобразований.

При изучении процессов в реальных системах и их математических моделях различают три типа времени:

1) *реальное*, во время которого протекают процессы в реальных условиях и системах;

2) *системное*, во время которого протекают процессы в модели системы. При разработке математических моделей это время представляется в виде отдельной переменной. Использование системного времени позволяет анализировать процессы в моделях в ускоренном или замедленном темпе, а также останавливать решение для изучения процессов в какой-то момент времени;

3) *машинное*, во время которого происходит моделирование системы на ЭВМ, оно регистрируется специальным устройством ЭВМ — таймером.

Для моделирования систем РА применяют следующие виды ЭВМ: аналоговые вычислительные машины (АВМ), цифровые (ЦВМ) и гибридные, состоящие как из аналоговых, так и цифровых ЭВМ.

§ 14.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА АВМ

АВМ обладает рядом характерных свойств, основные из которых следующие: высокое быстродействие, работа в реальном времени, удобная и наглядная форма ввода

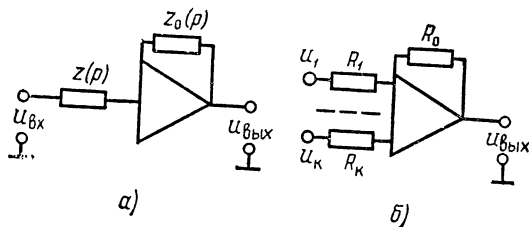


Рис. 14.1. Схема операционного усилителя:
а — общая; б — суммирующего ОУ

и вывода данных, простота программирования, возможность включения в состав моделирующей установки реальной аппаратуры.

Основным решающим элементом АВМ является операционный усилитель (ОУ) с обратной связью (рис. 14.1, а), передаточная функция которого

$$W(p) = - \frac{z_0(p)}{z(p)} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_y} \left(1 + \frac{z_0(p)}{z(p)} \right)},$$

где $z_0(p)$, $z(p)$ — операторные сопротивления в цепи обратной связи и входной цепи усилителя; k_y — коэффициент усиления усилителя без обратной связи.

В усилителях АВМ коэффициент АВМ k_y равен нескольким сотням тысяч, поэтому передаточную функцию операционного усилителя с высокой точностью можно принять следующей:

$$W(p) = - \frac{z_0(p)}{z(p)}. \quad (14.1)$$

В табл. 14.1 даны схемы моделей типовых звеньев систем РА.

Если входная цепь операционного усилителя состоит из нескольких параллельно включенных резисторов (рис. 14.1, б), а в цепь обратной связи включен резистор R_0 , то операционный усилитель производит суммирование:

$u_{\text{вых}} = \frac{k}{2} k_i u_i$, где $k_i = -R_0/R_i$ — коэффициенты усиления.

Таблица 14.1

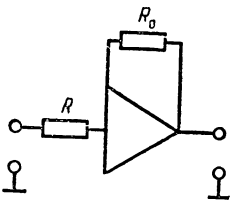
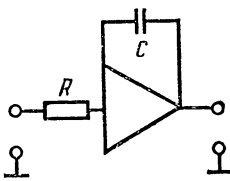
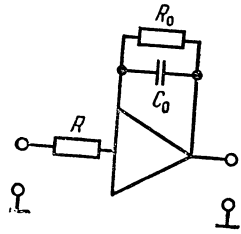
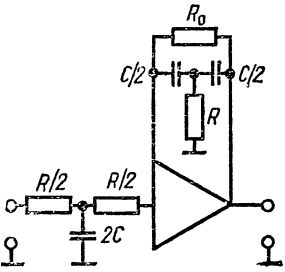
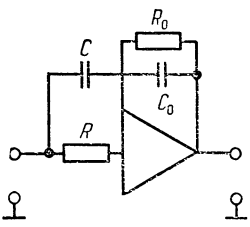
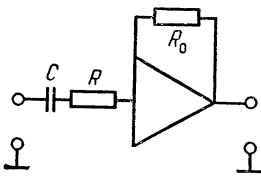
Схема модели	Передаточная функция
	$W(p) = -k = -\frac{R_0}{R}$
	$W(p) = -\frac{k}{p};$ $k = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}$
	$W(p) = -\frac{k}{1 + pT};$ $k = \frac{R_0}{R}, \quad T = R_0 C_0$
	$W(p) = -\frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1};$ $k = R_0/R; \quad T^2 = RR_0 C^2;$ $\xi = \sqrt{R/R_0}$

Схема модели	Передающая функция
	$W(p) = -k \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1};$ $k = R_0/R; \quad T_1 = R_0 C_0; \quad T_2 = RC$
	$W(p) = -\frac{pT_0}{1 + pT}$ $T_0 = R_0 C; \quad T = RC$

При моделировании реальные переменные исследуемой системы и внешние воздействия отображаются в АВМ напряжениями, которые называют *машинными переменными*. Соответствие между реальными и машинными переменными устанавливают с помощью масштабных коэффициентов, выбираемых из условия

$$m_x \leq u_m / |x_m|, \quad (14.2)$$

где u_m — максимальное напряжение на выходе усилителей АВМ; $|x_m|$ — максимальное значение моделируемой переменной.

Масштабные коэффициенты — размерные величины. Так, если $x(t)$ является, например, углом поворота антенны РЛС, то размерность масштабного коэффициента вольт, деленный на радиан (В/рад).

Если требуется замедлить или ускорить процессы в модели по сравнению с процессами в реальной системе, то вводят масштабный коэффициент времени $m(t) = t_m/t$, где t_m — системное время. При этом постоянные времени и коэффициенты передачи дифференцирующих

и интегрирующих звеньев пересчитывают по формулам $T_{iM} = m_i T_i$, $k_{iM} = m_i k_i$ для дифференцирующих и $k_{iM} = k_i / m_i$ для интегрирующих звеньев.

Различают два способа моделирования систем РА: по дифференциальным уравнениям и по структурным схемам.

Рассмотрим моделирование по дифференциальным уравнениям на примере системы ФАПЧ, структурная схема которой приведена на рис. 1.8, а передаточная функция в разомкнутом состоянии определяется выражением (4.16). Дифференциальное уравнение системы в замкнутом состоянии имеет вид

$$(p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \omega_r(t) = (b_1 p + b_0) \omega_\Phi(t), \quad p = d/dt, \quad (14.3)$$

$$\text{где } a_2 = \frac{T_{\Phi\Delta} + T_1}{T_{\Phi\Delta} T_1}; \quad a_1 = \frac{1 + kT_2}{T_{\Phi\Delta} T_1}; \quad a_0 = b_0 = \frac{K}{T_{\Phi\Delta} T_1};$$

$$b_1 = \frac{kT_2}{T_{\Phi\Delta} T_1}.$$

Уравнение (14.3) представим в виде (8.5):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t); \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + h_2 \omega_\Phi(t); \\ \dot{z}_3(t) &= -a_0 z_1(t) = a_1 z_2(t) - a_2 z_3(t) + h_3 \omega_\Phi(t), \end{aligned} \quad (14.4)$$

где $z_1(t) = \omega_r(t)$; $z_2(t) = \dot{\omega}_r(t)$; коэффициенты h_2 и h_3 вычисляются по формулам (8.7).

Введем масштабные коэффициенты m_{z_1} , m_{z_2} , m_{z_3} для переменных $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $m_{\dot{z}_1}$, $m_{\dot{z}_2}$, $m_{\dot{z}_3}$ для производных переменных состояния и m_ω для частоты эталонного и перестраиваемого генераторов.

Через масштабные коэффициенты и напряжения модели система уравнений (14.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_{z_1} / m_{\dot{z}_1} &= u_{z_2} / m_{z_2}; \\ \dot{u}_{z_2} / m_{\dot{z}_2} &= u_{z_3} / m_{z_3} + h_2 u_{\omega_\Phi} / m_\omega; \\ \dot{u}_{z_3} / m_{\dot{z}_3} &= -a_0 u_{z_1} / m_{z_1} - a_1 u_{z_2} / m_{z_2} - a_2 u_{z_3} / m_{z_3} + h_3 u_{\omega_\Phi} / m_\omega, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{u}_{z_1} &= k_2 u_{z_2}; \\ \dot{u}_{z_2} &= k_3 u_{z_3} + \beta_3 u_{\omega_\Phi}; \\ \dot{u}_{z_3} &= -\alpha_0 u_{z_1} - \alpha_1 u_{z_2} - \alpha_2 u_{z_3} + \beta_3 u_{\omega_\Phi}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

где

$$k_2 = m_{z_1}'/m_{z_1}; \quad k_3 = m_{z_3}'/m_{z_3}; \quad \alpha_0 = a_0 m_{z_1}'/m_{z_1}; \quad \alpha_1 = a_1 m_{z_1}'/m_{z_2}; \\ \alpha_2 = a_2 m_{z_3}'/m_{z_3}; \quad \beta_2 = h_2 m_{z_1}'/m_{\omega}; \quad \beta_3 = h_3 m_{z_1}'/m_{\omega}.$$

Выражения (14.5) образуют систему машинных уравнений, масштабы переменных в которой необходимо выбрать в соответствии с (14.2), а также с учетом того, чтобы коэффициенты усиления операционных усилителей для обеспечения стабильности работы моделирующей установки не превышали нескольких десятков.

На рис. 14.2 приведена схема модели системы ФАПЧ, составленная по уравнениям (14.5), коэффициенты уси-

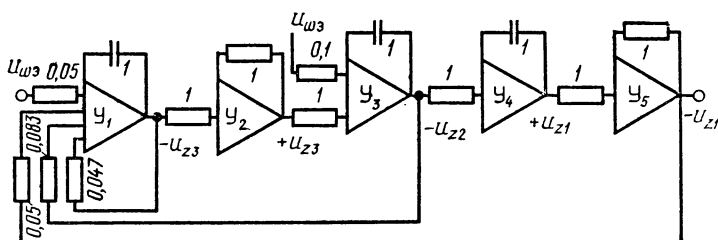


Рис. 14.2. Схема модели системы ФАПЧ

ления которой рассчитаны для параметров системы $T_{\text{фл}}=0,005$ с; $T_1=0,1$ с; $T_2=0,05$ с при следующих значениях масштабных коэффициентов: $m_{z_1}=m_{\omega}=10$ В·с; $m_{z_1}'=m_{\omega}'=1$ В·с²; $m_{z_3}=m_{z_4}=0,01$ В·с³; $m_{z_3}'=m_{z_4}'=0,001$ В·с⁴; $m_t=1$.

На схеме рис. 14.2 сопротивления резисторов указаны в мегаомах, а емкости конденсаторов в микрофарадах.

Недостатком рассмотренного метода моделирования является трудность исследования влияния параметров отдельных устройств системы на характеристики системы, так как коэффициенты усиления зависят от нескольких параметров системы и выбранных масштабных коэффициентов.

Более удобным оказывается метод моделирования по структурной схеме. В этом случае каждому звену структурной схемы исследуемой системы в АВМ соответствует модель этого звена, которую составляют по пе-

редаточным функциям в соответствии с табл. 14.1 или по дифференциальному уравнению звена. Таким образом, совокупности физических устройств системы РА в АВМ соответствует набор моделей этих устройств, соединенных так же, как и устройства в реальной системе.

На рис. 14.3 показана структурная схема модели системы ФАПЧ, составленная по структурному методу. На

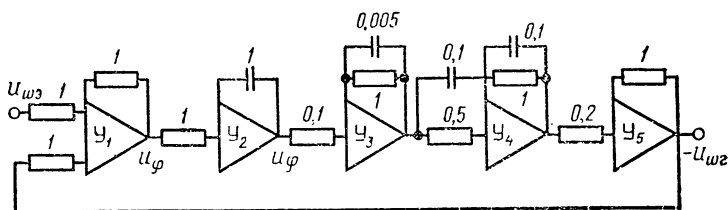


Рис. 14.3. Схема модели системы ФАПЧ по структурному методу

усилителях $У_1 — У_3$ моделируется линеаризованный фазовый детектор, на усилителе $У_4$ — фильтр нижних частот, а на усилителе $У_5$ — перестраиваемый генератор. Так как обратная связь должна быть отрицательной, то число усилителей в замкнутом контуре модели системы должно быть нечетным.

От схемы модели системы ФАПЧ, приведенной на рис. 14.3, легко перейти к схеме модели нелинейной системы. Для этого необходимо после усилителя $У_2$ включить нелинейный блок, на котором воспроизводится косинусная зависимость фазового детектора. Такие нелинейные блоки входят в состав АВМ.

Для изменения коэффициента усиления в моделируемой системе достаточно изменить коэффициент усиления какого-либо усилителя, а изменяя емкости, можно проследить влияние постоянных времени устройств системы на характеристики всей системы ФАПЧ.

Начальные условия системы в модели задаются начальными значениями напряжений на выходе интегрирующих усилителей.

Для исследования систем РА на модели АВМ необходимо сформировать различные воздействия.

Способы формирования детерминированных сигналов можно разделить на три группы. К первой группе относятся способы, при которых сигналы формируются непосредственно на операционных усилителях. Так гене-

рируются типовые воздействия (единичная функция и воздействия в виде полинома). Единичная функция моделируется как постоянное напряжение, момент включения которого синхронизируется с включением АВМ. Для моделирования воздействия в виде полинома используется цепочка интегрирующих усилителей (рис. 14.4), на выходе которой генерируется сигнал вида $x(t) = a_0 1(t) + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k$.

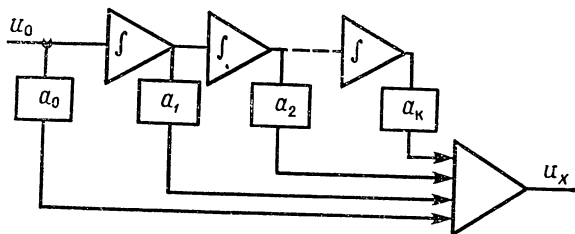


Рис. 14.4. Схема моделирования полиномиального сигнала

Ко второй группе способов моделирования детерминированных сигналов относятся способы генерирования аналитических функций, которые получаются как результат решения на АВМ некоторых дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например формирование сигнала $x(t) = \sin \omega t$. Дифференцируя $x(t)$, найдем, что $\dot{x}(t) = \omega \cos \omega t$, $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \sin \omega t$ или $\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$. Таким образом, решив на АВМ последнее дифференциальное уравнение, получим модель гармонического сигнала. Аналогичным образом сигнал вида $x(t) = e^{\pm j\omega t}$ может быть найден путем решения на АВМ дифференциального уравнения $\dot{x}(t) \pm j\omega x(t) = 0$. Также могут быть получены модели и других сигналов.

К третьей группе относятся способы моделирования недифференцируемых сигналов, например, периодических прямоугольных или треугольных импульсов, сигналов пилообразного вида. Математическое обеспечение современных АВМ обычно включает генераторы таких сигналов, частоту которых можно изменять в диапазоне от 0,01 до 100 Гц, а амплитуду — от 0 до 100 или 50 В.

Помимо формирования детерминированных сигналов при исследовании систем РА на АВМ необходимо воспроизведение и случайных воздействий. Существует два

метода формирования случайных воздействий: 1) метод, использующий реальные физические источники шума; 2) метод, основанный на применении псевдослучайных чисел. В генераторах, построенных по первому методу, в качестве источника шума используют шумовые диоды, кремниевые стабилитроны, тиратроны. Такие генераторы позволяют получить случайный сигнал со спектром, не равным нулю до 150 Гц.

Генераторы с псевдослучайными числами отличаются высокой стабильностью характеристик. Они позволяют многократно воспроизводить одну и ту же реализацию случайного процесса достаточно большой продолжительности. Так как в таких генераторах воспроизводится одна и та же реализация случайного процесса, то всегда необходима проверка корректности применения такого вида процесса.

Для получения случайных сигналов с нужными статистическими характеристиками используют формирующие фильтры, передаточные функции которых определяются методами, изложенными ранее.

При моделировании систем РА со случайными сигналами нужно внимательно относиться к выбору масштабов переменных. Необходимо, чтобы для любой переменной модели $x(t)$ выполнялось условие $|x - m_x| \leq 3\sigma$, где m_x — математическое ожидание переменной $x(t)$; σ — ее среднее квадратическое значение. При выборе масштабов из этого условия ошибки определения статических переменных будут достаточно малы.

Результаты моделирования систем РА фиксируются визуально с помощью осциллографа или какого-либо другого регистрирующего прибора. Так, для определения переходного процесса нужно на вход модели подать единичное воздействие и зафиксировать напряжение, моделирующее выходной сигнал системы. Для оценки динамической точности на вход модели нужно подключить напряжение, сформированное по схеме рис. 14.4, и зафиксировать при нулевых начальных условиях напряжение ошибки.

Для нахождения частотных характеристик на вход модели подключают напряжение от низкочастотного генератора, изменяющееся по гармоническому закону. Отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного позволяет получить амплитудно-частотную характеристику, а сдвиг фазы колебаний выходного сиг-

нала относительно входного определяет фазочастотную характеристику моделируемой системы РА.

При моделировании систем в условиях действия случайных воздействий измеряется средняя квадратическая ошибка, которую для стационарного эргодического процесса вычисляют по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{e}^2(t) dt,$$

где $\overset{\circ}{e}(t) = e(t) - m_e$ — центрированная случайная функция ошибки; T — интервал наблюдения.

Для схемы реализации последнего выражения на АВМ требуется квадратор и интегрирующий усилитель.

Автокорреляционная и взаимные корреляционные функции оцениваются по формулам

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t - \tau) dt;$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t - \tau) dt,$$

для схемной реализации которых необходимы блоки запаздывания, перемножения и интегрирующие усилители.

В процессе проектирования систем РА на АВМ характеристики различных вариантов построения систем фиксируются. Варьируя параметрами отдельных звеньев, можно найти наиболее приемлемый вариант построения системы и оценить влияние изменения отдельных параметров на качество ее работы проектируемой.

§ 14.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ЭВМ

Моделирование систем РА на цифровых ЭВМ состоит из нескольких этапов:

формирование цифровой модели системы, т.е. выбор численного алгоритма решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системе;

выбор алгоритмов для моделирования управляющих и возмущающих воздействий;

составление на одном из универсальных алгоритмических языков (ФОРТРАН, PL-1 и т.п.) программы для

решения на ЦВМ численных алгоритмов цифровой модели;

отладка модели.

При выборе численных алгоритмов, реализуемых в цифровой модели системы, следует учитывать время вычислений, точность решения, объем памяти и др. Существует два класса численных методов решения дифференциальных уравнений, которые могут быть использованы для реализации в цифровых моделях. Первый класс базируется на интегрировании дифференциальных уравнений численными методами (Эйлера, Эйлера — Коши и Рунге — Кутты); математическое обеспечение современных УВМ содержит стандартные программы решения задач этими методами.

Второй класс численных методов основан на применении разностных уравнений, позволяющих процесс моделирования свести к рекуррентным вычислениям.

В цифровых моделях сигналы квантуются как по времени, так и по уровню, в результате чего возникают ошибки. В универсальных ЦВМ шаг квантования сигналов по уровню имеет малое значение (в ЦВМ серии ЕС шаг квантования $\Delta x = 2^{-22}x$), поэтому во многих инженерных задачах влиянием квантования сигналов по уровню на точность моделирования можно пренебречь и считать, что основное влияние на точность расчетов оказывает квантование сигналов по времени.

Помимо ошибок, связанных с квантованием сигналов, в цифровой модели из-за ограниченного числа разрядов ЦВМ возникают ошибки, связанные с округлением результатов математических операций. При большом числе математических операций, выполняемых на каждом шаге квантования сигналов по времени, например, при моделировании фильтров Калмана, ошибки округления накапливаются и могут качественно исказить результаты моделирования. Для снижения накопления ошибок округления следует уменьшить период квантования сигналов по времени, что может привести к росту математических операций, а следовательно, и к увеличению ошибок округления. Поэтому выбор периода квантования сигналов по времени с учетом ошибок округления является сложной задачей и обычно осуществляется в процессе моделирования экспериментально путем последовательного подбора. Начальное значение периода квантования сигналов по времени, согласно теореме Котельникова, $T \leq 1/(2f_{\text{эк}})$, где $f_{\text{эк}}$ — эквивалентная полоса

пропускания системы. Период T определяет нижнее значение периода квантования сигналов по времени, в действительности период T выбирают примерно на порядок меньше.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений описаны в литературе, поэтому ограничимся анализом методов второго класса, которые позволяют снизить требования к периоду квантования сигналов по времени, уменьшить необходимый объем памяти.

При моделировании линейной динамической системы по ее передаточной функции и выбранном методе дискретной аппроксимации находят цифровой эквивалент системы. Выбор метода дискретной аппроксимации (см. гл. 10) зависит от точности аппроксимации моделируемой системы ее цифровым эквивалентом. При использовании любого метода рассчитывают дискретную передаточную функцию цифровой модели системы, которую в общем случае можно записать в виде

$$W(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_l z^{-l}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_e z^{-e}}. \quad (14.6)$$

Из передаточной функции (14.6) следует следующее разностное уравнение

$$y(nT) = c_0 x(nT) + c_1 x[(n-1)T] + \dots + c_l x[(n-l)T] - \\ - a_1 y[(n-1)T] - \dots - a_e y[(n-e)T]. \quad (14.7)$$

Уравнение (14.7) и является цифровой моделью исследуемой системы.

Определение передаточной функции (14.6) связано с необходимостью предварительного вычисления полюсов моделируемой системы, что не всегда может быть сделано. Поэтому при цифровом моделировании нецелесообразно находить модель системы как совокупность цифровых моделей отдельных звеньев системы РА, полюсы которых нетрудно рассчитать. Так как число типовых звеньев в системах ограничено, то их цифровые модели могут быть составлены заранее, в этом случае модель цифровой системы становится универсальной, т.е. пригодной для моделирования систем РА различного назначения. При моделировании нелинейных систем РА в состав модели следует включить цифровые модели нелинейных звеньев.

Пример 14.1. Составить цифровую модель системы ФАПЧ, структурная схема которой показана на рис. 1.8.

Решение. Для упрощения постоянной времени фазового де-

тектора пренебрежем. В результате, согласно (4.16), передаточная функция системы ФАПЧ в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{k(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}.$$

Применим метод дискретной аппроксимации по переходному процессу. При этом цифровой эквивалент определяется по формуле (10.76). Цифровая модель разомкнутой системы определяется дискретной передаточной функцией

$$W_p(z) = \frac{c_{11} z^{-1}}{1 - a_{11} z^{-1}} + \frac{c_{12} z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (14.8)$$

где $c_{11} = k(T_2 - T_1)(1 - e^{-\beta})$; $c_{12} = kT$; $a_{11} = e^{-\beta}$; $\beta = T/T_1$.

Для выходного сигнала Z-преобразование (частоты напряжения перегреваемого генератора) имеет вид

$$Y(z) = W_p(z) E(z), \quad (14.9)$$

где $E(z) = X(z) - Y(z)$ — преобразование сигнала ошибки; $X(z)$ — Z-преобразование входного сигнала (частота сигнала с эталонного генератора).

Выражению (14.9) с учетом передаточной функции (14.8) соответствует следующее разностное уравнение:

$$y(nT) = c_1 e[(n-1)T] + a_1 y \times [(n-1)T], \quad (14.10)$$

где $e(nT) = x(nT) - y(nT)$; $c_1 = c_{11} + c_{12}$; $a_1 = a_{11} + 1$.

Уравнение (14.10) является цифровой моделью системы ФАПЧ, схема алгоритма которого приведена на рис. 14.5.

Следующим этапом разработки цифровой модели системы РА является составление моделей управляющих и возмущающих воздействий.

Одним из возможных методов формирования модели детерминированных сигналов является табличный, в соответствии с которым в блоке памяти ЦВМ размещают массив дискретных значений

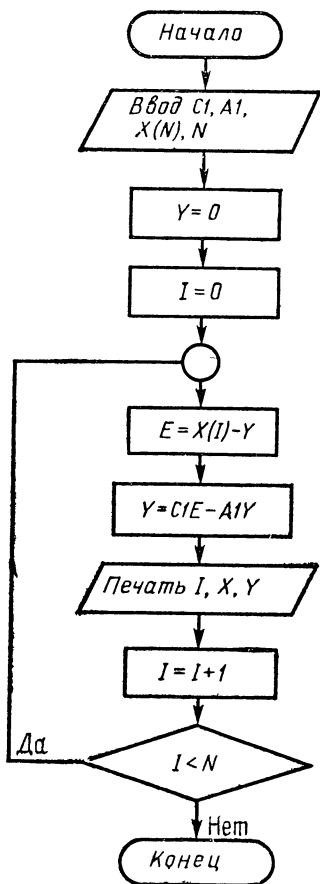


Рис. 14.5. Схема алгоритма моделирования цифровой системы ФАПЧ

сигнала, к которому обращаются в процессе решения задачи. Кроме того, существует метод генерирования детерминированных сигналов, основанный на математической зависимости, описывающей моделируемый сигнал (формульный метод). В этом случае возможны различные подходы к формированию модели сигнала. Одна из них базируется на числовом решении дифференциальных уравнений, позволяющих получить нужную модель сигнала. Разработан подход, основанный на разложении детерминированного сигнала в степенной ряд, в результате чего модель сигнала имеет вид рекуррентных уравнений, которые дают возможность вычислить последующий сигнал по значению, найденному на предыдущем шаге вычислений. Формульный метод моделирования детерминированных сигналов более удобен по сравнению с табличным, так как требует меньший объем памяти.

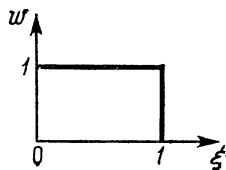


Рис. 14.6. Плотность распределения вероятности последовательности случайных чисел

При моделировании случайных сигналов возможны два случая. В первом случайным является какой-либо параметр детерминированного сигнала, например амплитуда синусоидального сигнала, во втором случае моделируется случайный сигнал с заданными статистическими характеристиками.

Выборку случайных значений параметра сигнала производят с помощью датчика случайных чисел, который представляет в современных ЦВМ стандартную программу, вырабатывающую последовательность случайных чисел с равномерным распределением на интервале $(0, \dots, 1)$ (рис. 14.6).

Из случайной последовательности с равномерным распределением можно сформировать последовательности с заданным распределением. Один из методов выработки случайной последовательности чисел с гауссовским распределением основывается на центральной предельной теореме, в соответствии с которой сумма независимых случайных величин x_i с произвольными законами распределения и мало отличающимися дисперсиями образует последовательность $\xi = \sum_{i=1}^n x_i$ с законом распределения, приближающимся к гауссовскому при

$n \rightarrow \infty$. На практике при $n \geq 8$ и x_i , равномерно распределенных на интервале $(0, \dots, 1)$, распределение последовательности ξ близко к гауссовскому с математическим ожиданием $M[\xi] = n/2$ и дисперсией $\sigma_{\xi}^2 = n/12$. Нормированное распределение с $M[\xi] = 0$ и $\sigma_{\xi}^2 = 1$ можно получить с помощью алгоритма

$$\xi = \sqrt{\frac{12}{n}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} \right),$$

где x_i — случайные числа с равномерным распределением на интервале $(0, \dots, 1)$.

При $n=12$ $\xi = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6$.

Моделирование случайных последовательностей с произвольными распределениями также выполняется на основе равномерного распределения чисел на интервале $(0, \dots, 1)$. Для этого используют теорему, согласно которой случайная величина $x = \int_{-\infty}^{\xi} w(\xi) d\xi$ распределена равномерно на интервале $(0, \dots, 1)$ независимо от вида $w(\xi)$. Поэтому для моделирования случайной последовательности с плотностью распределения $w(\xi)$ можно решить относительно верхнего предела следующее интегральное уравнение:

$$x_i = \int_{-\infty}^{\xi_i} w(\xi) d\xi.$$

Если при $\xi < \xi_0$ $w(\xi) = 0$, то нижний предел интегрирования можно заменить на ξ_0 .

Цифровая модель такого сигнала с заданной спектральной плотностью состоит из цифровой модели формирующего фильтра, частотная характеристика которого определяется выражением (6.24), и цифровой модели белого шума.

Пример 14.2. Составить цифровую модель формирующего фильтра для моделирования случайного сигнала, спектральная плотность которого

$$S_x(\omega) = \frac{N_x}{T_x^4 \omega^4 + 2T_x^2 \omega^2 (1 - 2\xi^2) + 1}.$$

Решение. Используя выражение (6.24), найдем передаточную

функцию формирующего фильтра:

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1}{T_x^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Для определения цифровой модели формирующего фильтра прием метод дискретной аппроксимации по импульсной переходной функции. В этом случае дискретная передаточная функция цифрового эквивалента формирующего фильтра

$$W_{\Phi}(z) = \frac{b_1 z}{z^2 - a_1 z + a_0},$$

где $b_1 = (T_x^2) 2\beta e^{-\alpha T} \sin \beta T$; $a_1 = 2e^{-\alpha T} \cos \beta T$, $a_0 = e^{-2\alpha T}$;

$\alpha = \xi/T$; $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$; T — период квантования сигналов по времени. Данной передаточной функции соответствует разностное уравнение

$$x(nT) = b_1 v[(n-1)T] + a_1 x[(n-1)T] - a_0 x[(n-2)T],$$

где $x(nT)$ — выходной сигнал формирующего фильтра; $v(nT)$ — дискретный белый шум на входе формирующего фильтра интенсивностью N_x .

Достаточно полное изложение методов формирования цифровых моделей различных случайных воздействий дано в [2].

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 14

1. Какой усилитель называют операционным? Как определяется его передаточная функция?
2. Составьте структурные схемы типовых звеньев с использованием операционных усилителей.
3. Укажите основные методы математического моделирования на АВМ.
4. Поясните основные принципы моделирования сигналов на АВМ.
5. Поясните основные методы составления цифровых моделей систем РА.
6. Какие методы используют в цифровых моделях для моделирования детерминированных сигналов?
7. Каким образом моделируют гауссовскую последовательность случайных чисел?

ГЛАВА 15

ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ КУРСА

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ РА

15.1. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 15.1, определить передаточные функции:

1) разомкнутой системы $W_p(p)$; 2) замкнутой системы $W_{zx}(p)$, $W_{zy}(p)$; 3) ошибки $W_{ex}(p)$, $W_{ey}(p)$; 4) преобразования Лапласа $Y(p)$ и $E(p)$.

15.2. Для системы рис. 15.2 определить передаточные функции $W_p(p)$, $W_{zx}(p)$, $W_{zy}(p)$ и $E(p)$.

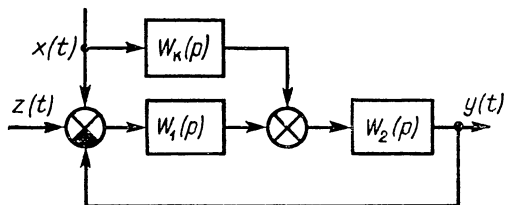


Рис. 15.1. Структурная схема комплексной системы РА

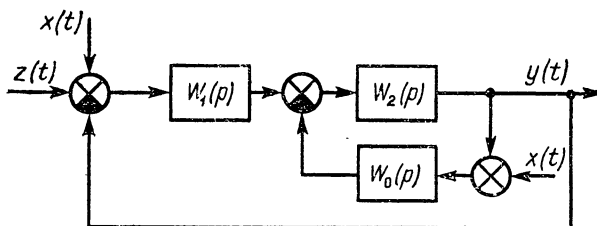


Рис. 15.2. Структурная схема двухконтурной системы РА

15.3. Передаточная функция системы имеет вид

$$W_{з.с}(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Найти уравнение системы в установившемся режиме при постоянном входном сигнале.

15.4. Оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в замкнутом состоянии имеет вид

$$W_3(p) = \frac{2 \cdot 10^4}{p^3 + 130p^2 + 3,2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^4}.$$

15.5. Для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{10}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,01p)},$$

определить запас устойчивости по усилению.

15.6. Для системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{20(1 + Tp)}{p^2(1 + 0,1p)},$$

найти постоянную времени T , при которой запас устойчивости по усилению равен двум.

15.7. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)^2}.$$

Найти зависимость критического коэффициента усиления от постоянной времени T .

15.8. По критерию устойчивости Найквиста оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{100}{p(1 + 0,05p)(1 + 0,02p)}.$$

15.9. По логарифмическим частотным характеристикам определить запас устойчивости в системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{100(1 + 0,25p)}{p(1 + p)(1 + 0,01p)^2}.$$

15.10. По критерию устойчивости Найквиста найти критический коэффициент усиления в системе, передаточная функция которой в замкнутом состоянии

$$W_z(p) = \frac{100(1 + 0,25p)}{p(1 + p)(1 + 0,01p)^2}.$$

Определить запас устойчивости по усилению.

15.11. По логарифмическим частотным характеристикам оценить запас устойчивости в системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{50(1 + 0,2p)}{p^2(1 + 0,02p)}.$$

15.12. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K(1 + 0,5p)}{p(1 + 2p)(1 + 0,02p)^2}.$$

По логарифмическим частотным характеристикам определить коэффициент усиления в системе, при котором запас устойчивости по усилению равен десяти.

15.13. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{3}{(1 + 0,2p)(1 + 0,01p)}.$$

Определить переходную и импульсную переходную функции замкнутой системы.

15.14. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{20}{p(1 + 0,1p)}.$$

Найти переходную и импульсную переходные функции замкнутой системы.

15.15. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_s(p) = \frac{1}{(1 + 0,1p)(1 + 0,02p)(1 + 0,01p)}.$$

Определить выходной сигнал в установившемся режиме при управляющем воздействии $x(t) = 1(t)$ и указать порядок астатизма системы.

15.16. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_s(p) = \frac{0,8}{(1 + 0,01p)(1 + 0,05p)(1 + 0,04p)}.$$

Определить установившееся значение выходного сигнала при входном сигнале $x(t) = 1(t)$ и указать порядок астатизма системы.

15.17. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{100(1 + 0,2p)}{p^2(1 + 0,02p)}.$$

Найти аналитическое выражение для выходного сигнала замкнутой системы и сигнала ошибки при управляющем воздействии $x(t) = 10 \sin 5t$ и нулевых начальных условиях.

15.18. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_s(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма если:

1) $v=0$; 2) $v=1$; 3) $v=2$?

15.19. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если:

1) $v=0$; 2) $v=1$; 3) $v=2$?

15.20. Передаточная функция ошибки системы

$$W_e(p) = \frac{d_4 p^4 + d_3 p^3 + d_2 \dot{p}^2 + d_1 p + d_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если:
1) $v=0$; 2) $v=1$; 3) $v=2$?

15.21. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}.$$

Найти ошибку в замкнутой системе при управляющем воздействии $x(t) = \alpha_0 1(t) + \alpha_1 t 1(t)$.

15.22. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Вычислить ошибку в замкнутой системе при входном сигнале $x(t) = \alpha_1 t 1(t)$.

15.23. Определить первые два коэффициента ошибок для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)^2(1 + T_3 p)}.$$

15.24. В комплексной системе (см. рис. 15.1) при $W_1(p) = 10$, $W_2(p) = 1/p$ и $W_k(p) = p/(1 + 0,01p)$ вычислить первые два коэффициента ошибок комплексной системы и замкнутого контура, а также ошибку относительно воздействий $x(t) = \alpha_x t$ и $z(t) = \alpha_z t$.

15.25. В комплексной системе (см. рис. 15.2) вычислить первые два коэффициента ошибок относительно воздействий $x(t)$ и $z(t)$ случая, когда

$$W_1(p) = 10/(1 + 0,01p); \quad W_2(p) = 10/p; \quad W_0(p) = 0,01p.$$

15.26. Передаточная функция замкнутой системы $W_3(p) = b_0/(p^3 + a_2 p + a_1 p + a_0)$. Найти векторное дифференциальное уравнение системы.

15.27. Оценить устойчивость системы, векторное дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ -0,2 \cdot 10^4, & -380, & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \cdot 10^4 \end{bmatrix} x(t).$$

15.28. Векторное дифференциальное уравнение систе-

мы определяется выражением

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ -167, & -10, & -18,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 167 \end{bmatrix} x(t).$$

Найти матрицу переходных функций.

15.29. Вычислить матрицу перехода для системы, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -500, & -60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \end{bmatrix} x(t).$$

15.30. Корреляционная функция случайного процесса $R(\tau) \cdot \sigma^2 e^{-\mu|\tau|}$, где μ — параметр затухания. Определить спектральную плотность процесса.

15.31. Передаточная функция разомкнутой системы $W_p(p) = K/p$. Рассчитать эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы.

15.32. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}.$$

Вычислить эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы.

15.33. Найти эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутых систем, передаточные функции которых в разомкнутом состоянии определяются выражениями:

$$1) W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p^2(1 + T_3 p)}; \quad 2) W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p^2}.$$

15.34. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)}.$$

Рассчитать суммарную среднюю квадратическую ошибку при действии на замкнутую систему управляющего воздействия со спектральной плотностью $S_x(\omega) = N_x/(1 + T_x^2 \omega^2)$ и помехи со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$.

15.35. Вычислить суммарную среднюю квадратическую ошибку в системе с передаточной функцией $W_s(p) = K/(p+K)$, на вход которой подают управляющее воздействие и помеха со спектральными плотностями: $S_x(\omega) = N_x/(1+\omega^2 T_x^2)$, $S_n = N_n$.

15.36. В комплексной системе, структурная схема которой приведена на рис. 15.1, $W_1(p) = 10$, $W_2(p) = 1/p$, $W_k(p) = p/(1+0,01p)$. Определить среднеквадратические ошибки относительно воздействия сигнала $x(t)$ и помехи $z(t)$. Найти суммарную среднюю квадратическую ошибку для случая, когда $S_x(\omega) = 1/(1+0,01\omega^2)$; $S_z(\omega) = 3,05 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

15.37. На систему с передаточной функцией в разомкнутом состоянии $W_p(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$ действует стационарный сигнал со спектральной плотностью $S_x(\omega) = \frac{2T_x \sigma_x^2}{1+\omega^2 T_x^2}$ и помеха со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$. Определить оптимальное значение коэффициента усиления, соответствующего минимуму суммарной среднеквадратической ошибки при $T=0,1 \text{ с}$; $T_x=20 \text{ с}$; $\sigma_x^2 = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ рад}^2$; $N_n = 3,05 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

15.38. Передаточная функция разомкнутой системы $W_p(p) = K(1+pT)/p^2$, где $K=100 \text{ с}^2$. На вход замкнутой системы подается управляющее воздействие $x(t) = \alpha t^2/2$ и помеха со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$. Найти постоянную времени корректирующего устройства T , соответствующую минимуму средней квадратической ошибки системы при $\alpha_2 = 0,17 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}$; $N_n = 3,05 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ РА

15.39. Для цифровой системы, структурная схема которой изображена на рис. 15.3, найти передаточные функции: 1) $W_p(z)$; 2) $W_z(z)$; 3) $W_e(z)$ при $W_n(p) = k_1/(1+T_1p)$.

15.40. Найти передаточные функции $W_p(z)$, $W_z(z)$, $W_e(z)$ для системы рис. 15.3, если $W_n(p) = k/p^2$.

15.41. Для цифровой системы, структурная схема которой показана на рис. 15.4, определить передаточные функции $W_p(z)$, $W_z(z)$ и $W_e(z)$ при $W_n(p) = k/p$.

15.42. Найти передаточные функции цифровой системы (рис. 15.4), если $W_n(p) = ke^{-pT}/p$.

15.43. Структурная схема дальномера с двумя интеграторами показана на рис. 15.5. Найти передаточные функции этого дальномера.

15.44. Определить условие устойчивости цифровой системы в задаче 15.39.

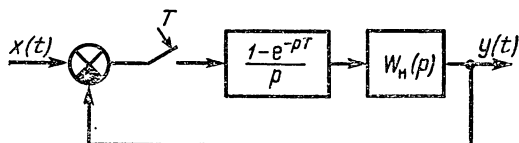


Рис. 15.3. Структурная схема цифровой системы РА

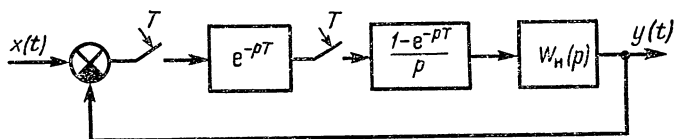


Рис. 15.4. Структурная схема цифровой системы РА с учетом запаздывания

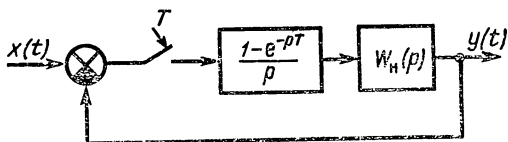


Рис. 15.5. Структурная схема дальномера с двумя интеграторами

15.45. Оценить устойчивость системы в задаче 15.40.

15.46. Найти условие устойчивости для системы задачи 15.41.

15.47. Определить условие устойчивости в цифровой системе задачи 15.42.

15.48. Найти условие устойчивости дальномера с двумя интеграторами, структурная схема которого дана на рис. 15.5.

15.49. Вычислить дискретные значения переходного

процесса и статической ошибки в цифровой системе задачи 15.39 для случая, когда $T=T_1=0,1$ с; $k_1=0,5$.

15.50. Для условий задачи 15.41 определить дискретные значения переходного процесса относительно ошибки, если $kT=0,5$.

15.51. Для условий задачи 15.39 вычислить ошибку системы при входном сигнале $x(t)=\alpha t$.

15.52. Вычислить ошибку в системе задачи 15.41 относительно управляющего воздействия $x(t)=\alpha t$.

15.53. Определить среднюю квадратическую ошибку системы задачи 15.39 при действии белого шума.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

15.54. Для релейной характеристики (рис. 15.6) определить эквивалентный коэффициент передачи.

15.55. Для релейной характеристики (рис. 15.7) найти эквивалентный коэффициент передачи.

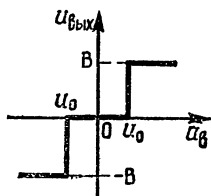


Рис. 15.6. Релейная характеристика звена

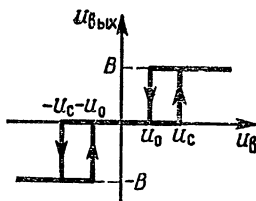


Рис. 15.7. Релейная характеристика звена с гистерезисом

15.56. На рис. 15.8, а, б показаны структурная схема нелинейной системы и характеристика его нелинейного звена. Определить параметры автоколебаний (амплитуду и частоту) при

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_2 p};$$

$k_1 k_2 = 50$; $k_2 = 1$; $T_1^2 = 0,001$ с; $2\xi T_1 = 0,01$ с; $T_2 = 0,02$ с.

15.57. На рис. 15.9, а, б изображены структурная схема нелинейной системы и характеристика нелинейного звена. Найти параметры автоколебаний в системе, если

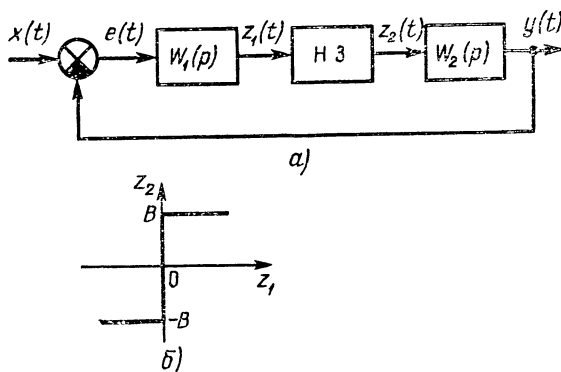


Рис. 15.8. Релейная система;

а — структурная схема; б — характеристика нелинейного звена

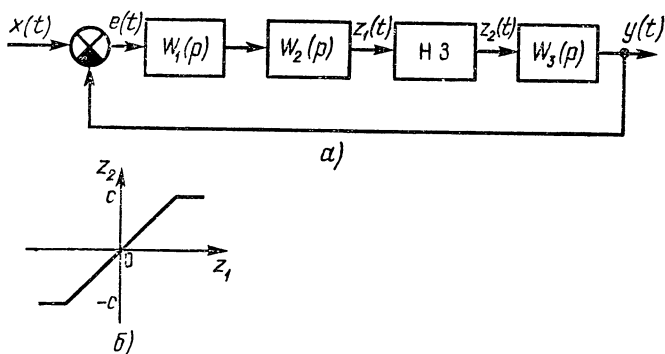


Рис. 15.9. Система РА с ограничением:

а — структурная схема; б — характеристика нелинейного звена

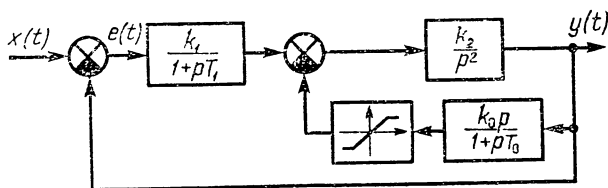


Рис. 15.10. Структурная схема следящей системы с астатизмом второго порядка

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{K_2}{1 + T_2 p};$$

$$W_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_3 p}; \quad k_1 k_2 k_3 = 500; \quad k_3 = 10; \quad T_1 = 1 \text{ с};$$

$$2\xi T_1 = 1,4 \text{ с}; \quad T_2 = 1 \text{ с}; \quad T_3 = 4 \text{ с}; \quad C = 50, \quad u_H = 1.$$

15.58. На рис. 15.10 показана структурная схема следящей системы с астатизмом второго порядка. Возможны ли в следящей системе автоколебания, если линеаризованная система устойчива?

ОТВЕТЫ

15.1. 1) $W_p(p) = W_1(p) W_2(p);$

2) $W_{zx}(p) = \frac{W_p(p) + W_K(p) W_2(p)}{1 + W_p(p)}; \quad W_{z2}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)};$

3) $W_{ex}(p) = \frac{1 - W_K(p) W_2(p)}{1 + W_p(p)}, \quad W_{ez}(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)};$

4) $Y(p) = W_{zx}(p) X(p) + W_{z2}(p) Z(p),$

$E(p) = W_{ex}(p) X(p) + W_{ez}(p) Z(p).$

15.2. $W_p(p) = \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 + W_2(p) W_0(p)};$

$W_{zx}(p) = \frac{W_1(p) W_2(p) + W_2(p) W_0(p)}{1 + W_1(p) W_2(p) + W_2(p) W_0(p)};$

$W_{z2}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)};$

$E(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)} Z(p) +$

$+\frac{X(p)}{1 + W_1(p) W_2(p) + W_2(p) W_0(p)}.$

15.3. $a_0 y(t) = b_0 x(t).$

15.4. Система устойчива.

15.5. $\alpha = 11.$

15.6. $T = 0,5 \text{ с}.$

15.7. $K_{кр} = 2/T.$

15.8. Система неустойчива.

15.9. $\alpha = 8; \quad \Delta\varphi = 0,87 \text{ рад}.$

15.10. $K_{кр} = 130 \text{ с}^{-1}; \quad \alpha = 21.$

15.11. $\alpha = \infty; \quad \Delta\varphi = 0,87 \text{ рад}.$

$$15.12. K = 38 \text{ c}^{-1}.$$

$$15.13. h(t) = 0,75 - 1,09e^{-25t} + 0,34e^{-80t}; \quad w(t) = 27,2e^{-25t} - 27,2e^{-80t}.$$

$$15.14. h(t) = 1(t) - 1,08e^{-5t} \sin(13,2t + 1,19); \\ w(t) = 15,1e^{-5t} \sin 13,2t.$$

$$15.15. \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1; \quad v = 1.$$

$$15.16. \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,8; \quad v = 0.$$

$$15.17. y(t) = 11,5 \sin(5t - 0,12); \quad e(t) = 2 \sin(5t + 2,8).$$

$$15.18. 1) b_0 \neq a_0; \quad 2) b_0 = a_0; \quad b_1 \neq a_1; \quad 3) b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \\ b_2 \neq a_2.$$

$$15.19. 1) c_0 \neq 0; \quad 2) c_0 = 0; \quad 3) c_0 = c_1 = 0.$$

$$15.20. 1) d_0 \neq 0; \quad 2) d_0 = 0; \quad 3) d_0 = d_1 = 0.$$

$$15.21. e_{\pi} = \alpha_1/K.$$

$$15.22. e_{\pi} = \frac{1}{1+K} \alpha_1 t + \frac{K(T_1 + T_2)}{(1+K)^2} \alpha_1.$$

$$15.23. C_0 = 1/(1+K); \quad C_1 = \frac{K(2T_1 + T_3 - T_2)}{(1+K)^2}.$$

$$15.24. C_{0x} = C_{1x} = 0; \quad C_{0z} = 0; \quad C_{1z} = 0,1 \text{ c}; \quad e_{\pi x} = 0; \\ e_{\pi z} = 0,1\alpha_z.$$

$$15.25. C_{0x} = C_{1x} = 0; \quad C_{0z} = 0; \quad C_{1z} = 0,001 \text{ c}.$$

$$15.26. \dot{Z}(t) = AZ(t) + Bx(t); \quad A = \begin{bmatrix} 0_1 & 1 & 0 \\ 0_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

$$15.27. \text{Система устойчивая.}$$

$$15.28. \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(t) - 0,5e^{-10t} + 4e^{-5t} - 4,5e^{-33,3t} \\ 5e^{-10t} - 20e^{-5t} + 150e^{-33,3t} \\ -50e^{-10t} + 100e^{-5t} - 5000e^{-33,3t} \end{bmatrix}.$$

$$15.29. \Phi(t - \tau) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} e^{10(t-\tau)} - \frac{1}{4} e^{-50(t-\tau)}; \quad \frac{1}{40} e^{-10(t-\tau)} - \frac{1}{40} e^{-50(t-\tau)} \\ -\frac{50}{4} e^{-10(t-\tau)} + \frac{50}{4} e^{-50(t-\tau)}; \quad -\frac{1}{4} e^{-10(t-\tau)} + \frac{5}{4} e^{-50(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

$$15.30. S(\omega) = \langle 2\mu\sigma^2 \rangle / (\mu^2 + \sigma^2).$$

$$15.31. \omega_{\partial R} = K/2.$$

$$15.32. \omega_{\partial R} = \frac{K(KT_2^2 + T_1 + T_3)}{2(T_1 + T_3 + K(T_1T_2 + T_2T_3 - T_1T_3))}.$$

$$15.33. 1) \omega_{\partial R} = \frac{1 + KT_2^2}{2(T_2 - T_3)}; \quad 2) \omega_{\partial R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} + KT_2 \right).$$

$$15.34. \sigma_{\Sigma}^2 = N_x \frac{T(1 + KT_x) + T_x}{2T_x(T + T_x + KT_x^2)} + N_{\Pi} \frac{K}{2},$$

$$15.35. \sigma_{\Sigma}^2 = N_x \frac{1}{2T_x(1 + KT_x)} + N_{\Pi} \frac{K}{2}.$$

$$15.36. \sigma_{ex}^2 = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2; \quad \sigma_{ez}^2 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2; \\ \sigma_{\Sigma}^2 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2.$$

$$15.37. K_0 = 30 \text{ с}^{-1}; \quad \sigma_{\Sigma}^2 = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2.$$

$$15.38. T_0 = 0,1 \text{ с}.$$

$$15.39. 1) W_p(z) = \frac{K}{z - e^{-\beta}}; \quad 2) W_3(z) = \frac{K}{z - e^{-\beta} + K};$$

$$3) W_e(z) = \frac{z - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta} + K}, \quad \text{где } K = k_1(1 - e^{-\beta}); \quad \beta = T/T_1.$$

$$15.40. W_p(z) = \frac{k}{2} \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^2}, \quad W_3(z) = \frac{k}{2} \times \\ \times \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^2 + KT^2(z+1)/2}; \\ W_e(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^3 + KT^2(z+1)/2}.$$

$$15.41. W_p(z) = \frac{KT}{z(z-1)}; \quad W_3(z) = \frac{KT}{z(z-1) + KT};$$

$$W_e(z) = \frac{z(z-1)}{z(z-1) + KT}.$$

$$15.42. W_p(z) = \frac{KT}{z^2(z-1)}, \quad W_3(z) = \frac{KT}{z^2(z-1) + KT},$$

$$W_e(z) = \frac{z^2(z-1)}{z^2(z-1) + KT}.$$

$$15.43. W_p(z) = KT \frac{z(T + 2T_0) + T - 2T_0}{2(z-1)^2};$$

$$W_3(z) = \frac{W_p(z)}{1 + W_p(z)}; \quad W_e(z) = \frac{1}{1 + W_p(z)}.$$

15.44. $K < 1 - e^{-\beta}$; $\beta = T/T_1$.

15.45. Система неустойчива.

15.46. $K < 1/T$.

15.47. $K < 0,62/T$.

15.48. $(2/KT) > T > T/2$.

15.49. $y(nT) = 0,33[1 - (0,055)^n]$; $e_c = 0,67$.

15.50. $e(nT) = 2(\sqrt{0,5})^{n+1} \sin \pi(n+1)/4$.

15.51. $e(nT) = \frac{1}{1+k_1} \alpha nT + \frac{k_1 T \alpha}{(1-e^{-\beta})(1+k_1)}$; $\beta = T/T_1$.

15.52. $e(nT) = \alpha/k$.

15.53. $\sigma^2 = \frac{N}{T} \frac{K_1^2}{1+k_1} \frac{1}{1+e^{-\beta}-k_1(1-e^{-\beta})}$; $\beta = T/T_1$.

15.54. $g(a) = \frac{4B}{\pi a} \sqrt{1+a/u_0}$; $b(a) = 0$.

15.55. $g(a) = \frac{2B}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)$; $b(a) =$
 $= \frac{2B}{\pi a} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)$. $\psi_1 = \arcsin(u_c/a)$,

$\psi_2 = \pi - \arcsin(u_0/a)$.

15.56. $a_{z2} = 12,7$; $\omega_K = 39 \text{ c}^{-1}$.

15.57. $a_{yK} = 3$; $\omega_K = 0,8 \text{ c}^{-1}$.

15.58. Режим автоколебаний невозможен.

Подведем некоторые итоги, с тем чтобы читатель смог оценить пройденный материал и наметить план дальнейшей работы.

В книге, написанной в соответствии с программой курса «Радиоавтоматика», помимо традиционных частотных методов применения систем радиоавтоматики, изложены также методы, использующие системный подход. Этот подход, принятый в современной науке, основывается на понятиях управляемости, наблюдаемости, статистической оценки состояния системы и формирования ее оптимального управления. Развитие методов системного подхода применительно к задачам анализа и синтеза систем автоматики радиотехнических устройств различного назначения и систем радиоуправления является, по нашему мнению, основой дальнейшего совершенствования курса «Радиоавтоматика».

В представленной работе ввиду ограниченного объема невозможно полностью проанализировать все области современной теории систем автоматического управления. Однако можно надеяться, что изучившие этот учебник смогут самостоятельно, используя литературные источники, продолжать работу в интересующих их областях.

Приложение П.1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

Функциональное преобразование вида

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = L[f(t)],$$

где $p = \sigma + j\beta$ — комплексная переменная, называют *преобразованием Лапласа*.

Основные теоремы:
линейности

$$\left[\sum_{k=1}^n a_k(t) f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p);$$

дифференцирования

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0);$$

интегрирования

$$L\left[\underbrace{\int \dots \int}_n f(t) dt^n \equiv f^{(-n)}(t)\right] = \frac{F(p)}{p^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(0)}{p^{n-k+1}};$$

запаздывания

$$L[f(t - \Delta)] = F(p) e^{-\Delta p};$$

умножения изображений

$$F_1(p) F_2(p) = L\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right];$$

о конечном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p);$$

о начальном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p);$$

обращения

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{i=1}^n \text{Res } F(p) e^{p_i t},$$

где $\text{Res } F(p) e^{p_i t} |_{p=\lambda_i}$ — вычет в полюсе λ_i , $i=1, 2, \dots, n$; n — число полюсов.

Преобразования Лапласа наиболее часто встречающихся функций приведены в табл. П.1.

Т а б л и ц а П.1

N	$f(t)$	$F(p)$	N	$f(t)$	$F(p)$
1	$\delta(t)$	1	6	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	8	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
4	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$	9	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	10	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$

Приложение П.2

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Интеграл от функции спектральной плотности записывают в виде

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2 d\omega,$$

где

$$C(j\omega) = c_{n-1}(j\omega)^{n-1} + c_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \dots + c_2(j\omega)^2 + c_1 j\omega + c_0;$$

$$D(j\omega) = d_n = (j\omega)^n + d_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + d_2(j\omega)^2 + d_1(j\omega) + d_0.$$

Для $n=1$

$$J_1 = \frac{c_0^2}{2d_0 d_1},$$

для $n=2$

$$J_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2},$$

для $n=3$

$$J_3 = \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)},$$

для $n=4$

$$J_4 = \frac{c_3^2 (-d_0^2 d_3 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2c_1 c_3) d_0 d_1 d_4}{2d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)} + \\ + \frac{(c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 d_4 + c_0^2 (-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)},$$

для $n=5$

$$J_5 = \frac{1}{2\Delta_5} [c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2 c_4 m_1 + (c_2^2 - 2c_1 c_3 + 2c_0 c_4) m_2 + \\ + (c_1^2 - 2c_0 c_2) m_3 + c_0^2 m_4],$$

где

$$m_0 = \frac{1}{d_5} (d_3 m_1 - d_1 m_2); \quad m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2;$$

$$m_2 = -d_2 d_5 + d_1 d_1; \quad m_3 = \frac{1}{d_0} (d_2 m_2 - d_4 m_1);$$

$$m_4 = \frac{1}{d_4} (d_2 m_3 - d_4 m_2);$$

$$\Delta_5 = d_0 (d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2).$$

**Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАИБОЛЕЕ ЧАСТО
ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ**

$x(t)$	$X(z)$	$X(z, mT), m = 1 - \Delta$
1 (t)	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{T^2 z (z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{(mT)^2}{z-1} + \frac{2mT^2}{(z-1)^2} + \frac{T^2 (z+1)}{(z-1)^3}$
t^3	$\frac{T^3 z (z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$	$\frac{(mT)^3}{(z-1)} + 3 \frac{m^2 T^3}{(z-1)^2} +$ $+ 3 \frac{mT^3 (z+1)}{(z-1)^3} +$ $+ \frac{T^3 (z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$	$\frac{e^{-\alpha mT}}{z - e^{-\alpha T}}$
$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z \cos \beta mT - \cos \beta \Delta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \frac{\pi}{T} t$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos m\pi - \cos \Delta\pi}{(z+1)^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z \sin \beta mT + \sin \beta \Delta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$	$\frac{e^{-\alpha mT} (z \cos \beta mT - e^{-\alpha T} \times$ $\rightarrow \frac{\times \cos \beta \Delta T}{+ e^{-2\alpha T}})$
$e^{-\alpha t} \cos \frac{\pi}{T} t$	$\frac{z}{z + e^{-\alpha T}}$	$e^{-\alpha mT} \frac{z \cos m\pi - e^{-\alpha T} \cos \Delta T}{(z + e^{-\alpha T})^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin \beta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$	$e^{-\alpha mT} \frac{z \sin \beta mT + e^{-\alpha T} \times$ $\rightarrow \frac{\sin \beta \Delta T}{\cos \beta T + e^{-2\alpha T}})$

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Определения. Матрицей $A = [a_{ij}]$ размером $m \times n$ называют таблицу чисел, состоящую из m строк и n столбцов; индекс i указывает номер строки, а индекс j — номер столбца. Числа (элементы) матрицы могут быть вещественными или комплексными. Рассмотрим матрицу с вещественными элементами:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицу размером $m \times 1$ называют *матрицей-столбцом* или *вектором-столбцом*:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Если $m=n$, то матрицу называют *квадратной*. В том случае, когда $a_{ij}=0$ при любых $i \neq j$ имеем *диагональную матрицу*. Диагональную матрицу, в которой $a_{ii}=1$, $i=1, 2, \dots, n$, называют *единичной*:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу произвольных размеров, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой*.

Если существует матрица $A = [a_{ij}]$ размером $m \times n$, то матрицу $A^T = [a_{ji}]$ размером $n \times m$ называют *транспонированной по отношению матрицы A*.

Матрицу считают симметричной, если $A^T = A$, и кососимметричной, если $A^T = -A$.

Сумму всех диагональных элементов квадратной матрицы называют *следом матрицы*: $S_p = \sum_i a_{ii}$.

Сложение и умножение матриц. Матрицы одинаковых размеров можно складывать. Элементы матрицы $C = A + B$ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Равенство $A = B$ означает, что $a_{ij} = b_{ij}$.

Умножение матрицы на число α означает, что все элементы матрицы умножаются на α .

Умножение матрицы A размером $m \times n$ на матрицу B размером $n \times r$ позволяет получить матрицу C размером $m \times r$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Таким образом, перемножить можно матрицы, если число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго. Для умножения матриц не справедлив коммутативный закон, т. е. $AB \neq BA$.

Произведение матрицы A размером $m \times n$ на вектор-столбец X размером $n \times 1$ дает вектор-столбец Y размером $m \times 1$, элементы которого $y_i = \sum a_{ij} x_j$.

Произведение вектора-столбца X размером $n \times 1$ на вектор-строку Y^T размером $1 \times n$ позволяет получить квадратную матрицу размером $n \times n$: $XY^T = A$.

Произведение вектора-строки Y^T размером $1 \times n$ на вектор-столбец X размером $n \times 1$ называют *скалярным произведением*:

$$X^T Y = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n.$$

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называют *перестановочными*. При транспонировании матриц имеем

$$(AB)^T = B^T A^T;$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

Определитель и обратная матрица. Если A — квадратная матрица размером $n \times n$, то ее определителем считают величину $|A| =$

$= \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$ при любом i , где $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента. Здесь M_{ij} — минор элемента a_{ij} , т. е. определитель квадратной матрицы, получаемой из матрицы A вычеркиванием i строки и j столбца.

Матрицу A называют *невырожденной (несингулярной)*, если ее определитель не равен нулю, в противном случае матрицу A называют *вырожденной (сингулярной)*.

Любая невырожденная матрица имеет обратную, которая вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \left[\frac{\Delta_{ji}}{|A|} \right].$$

Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

имеем

$$|A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12};$$

$$\Delta_{11} = a_{22}; \quad \Delta_{12} = -a_{21}; \quad \Delta_{21} = -a_{12}; \quad \Delta_{22} = a_{11}.$$

Таким образом, обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Действительную квадратную матрицу S , удовлетворяющую условию $S^{-1} = S^T$, называют *ортогональной*, определитель ортогональной матрицы $|S| = \pm 1$.

Квадратичные формы. Если A — вещественная симметричная матрица, а X — вектор-столбец, то $v(x) = X^T A X$ называют *квадратичной формой с матрицей преобразования A* .

Квадратичная форма $v(x)$ считается положительно определенной или отрицательно определенной, если соответственно

$$v(x) > 0 \text{ при } x \neq 0;$$

$$v(x) < 0 \text{ при } x \neq 0,$$

причем $v(0) = 0$.

Квадратичная форма $v(x)$ положительно определена, если все главные миноры матрицы A положительны, т. е.

$$a_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad |A| > 0.$$

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.
2. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Советское радио, 1971.
3. Гришин Ю. П., Казаринов Ю. М., Катиков В. М. Микропроцессоры в радиотехнических системах. — М.: Радио и связь, 1982.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. — М.; Высшая школа, 1975.
5. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования: Пер. с англ./Под ред. Я. З. Цыпкина. — М.: Физматгиз, 1963.
6. Коновалов Г. Ф., Коноваленко О. В. Системы автоматического управления с электромагнитными порошковыми муфтами. — М.: Машиностроение, 1976.
7. Кривицкий Б. Х., Салтыков Е. Н. Системы автоматической регулировки усиления. — М.: Радио и связь, 1982.
8. Леонов А. И., Фомичев К. И. Моноимпульсная радиолокация. — М.; Радио и связь, 1984.
9. Лихарев В. А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. — М.; Радио и связь, 1973.
10. Медич Д. Статистические оптимальные оценки и управление: Пер. с англ./Под ред. А. С. Шатолова. — М.: Энергия, 1973.
11. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральных микросхем: Справочник/Под ред. В. А. Шахнова. — М.: Радио и связь, 1988. Т. 1, 2.
12. Обрезков Г. В., Разевиг В. Д. Методы анализа срыва слежения. — М.: Советское радио, 1972.
13. Первачев В. С. Радиоавтоматика. — М.: Радио и связь, 1982.
14. Радиоавтоматика/Под ред. В. А. Бесекерского. — М.; Высшая школа, 1985.
15. Растрингин Л. А. Система экстремального управления. — М.; Наука, 1974.
16. Современная радиолокация: Пер. с англ./Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: Советское радио, 1969.
17. Теоретические основы радиолокации/Под ред. В. Е. Дулевича. — М.: Советское радио, 1978.

18. Ушкар М. Н. Микропроцессорные устройства в радиоэлектронной аппаратуре — М.: Радио и связь, 1988.
19. Цифровые системы синхронизации/Под ред. М. И. Жодзишского. — М.: Советское радио, 1980.
20. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977.
21. Чураков Е. Л. Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
22. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки и частоты. — М.: Связь, 1972.

Автоколебания 238, 246, 247

Алгоритм управления 9

Астатизм 59, 176

Вектор состояния 126, 129, 216

— управления 264

— характеристический 68

Воздействие возмущающее 8

— управляющее 7

Время машинное 290

— реальное 290

— системное 290

Годограф нелинейного звена 247

— характеристического вектора 69

— — частотной характеристики 34

— — звена 48, 49

— — разомкнутой системы 71, 72

— — устойчивых систем 71

Граница устойчивости 66, 179

Дальномер импульсный 22

Датчик обратной связи 7

Дельта-функция 31

Детектор синхронный 280

— фазовый 13, 37

— цифровой 195

Дискретизатор 157

Дискриминатор временной 22, 45

— цифровой 199

— угловой моноимпульсный 41

— с коническим сканированием 41

— частотный 10, 39

— цифровой 197

Дисперсия ошибки 89, 90, 177

Двигатель электрический 18, 46

Закон управления 9

Запас устойчивости по усилению 68, 73, 180

— — по фазе 73, 180

Звено безынерционное 47

— дифференцирующее первого порядка 51

— запаздывания 51

— идеальное дифференцирующее 50

— инерционное 48

— интегрирующее 49

— колебательное 49

— с опережением по фазе 107

— с отставанием по фазе 107

Идентификация параметров 61

Измеритель рассогласования 9

Импульсы мгновенные 156

Комплект микропроцессорный 208

Коэффициент гармонической линеаризации 241

— комплексной передачи 34

— масштабный 293

— ошибок 86, 87, 175

— передачи 11, 13, 36

— разомкнутой системы 63

— статистической линеаризации 249

Критерий качества 99

— оптимальности 264, 265

— устойчивости Гурвица 66, 179

— Михайлова 69

— Найквиста 72, 180

Линеаризация

— гармоническая 240

— обычная 36

— статистическая 249

Матрица Гурвица 67

— интенсивности белых шумов 224

— квадратичной формы 135

— наблюдения 127, 129, 216

— перехода 131

— дискретная 220

- системы 126, 129, 216
- управления 127, 129, 216
- усиления 226
- характеристическая 132, 222

Метод гармонической линеаризации 239, 240

- Гаусса—Зайделя 278
- градиента 276
- кусочно-линейной аппроксимации 239
- моделирования по дифференциальным уравнениям 294
- наискорейшего спуска 278
- синхронного детектирования 279

— статистической линеаризации 239, 249

— структурного моделирования 295

— фазовой плоскости 239

Микропроцессор 208

Моделирование имитационное 290

- математическое 289
- полунатурное 289
- физическое 289

Модуляция амплитудно-импульсная 192

— время-импульсная 193

— широтно-импульсная 193

Нелинейность статическая 238

Объем управления 7, 179

Определители Гурвица 67, 179

Ошибка динамическая 84

— квантования сигнала по уровню 188

— переходная 85

— по положению 87

— по скорости 87

— по ускорению 87

— средняя квадратическая 89, 177

— статическая 58, 166

— суммарная 88, 91, 177

Оценка интегральная 80, 134, 135

Память системы 31

Переменные машинные 293

— состояния 126, 217

Показатель колебательности 83

Полоса пропускания 82

— — оптимальная 144

— удержания 13, 208

— — эффективная относительно белого шума 93

Плотность вероятности шума квантования 188

— спектральная ошибки 91, 176

Преобразователь аналого-цифровой 153

— цифроаналоговый 153

Принцип максимума 266

Пространство состояний 217

Процесс марковский 256

Псевдочастота 167

Свойства Z-преобразования 159

Связь обратная гибкая 109

— — жесткая 109

Сигнал рассогласования 9

— управления 7

Синтезатор частот цифровой 201

Система автоматической подстройки частоты 10

— — — цифровая 203

— — регулировки усиления 18

— автоматического сопровождения цели 14

— адаптивная 27, 264, 272

— — управления АФР 213, 235

— астатическая 59

— замкнутая 8

— импульсная 192

— комплексная 118

— многоконтурная 59

— нелинейная 27, 238

— непрерывная 27

— нестационарная

— обучающая 264

— оптимальная 139, 140, 262

— — по быстродействию 264

— разомкнутая 8

— робастная 113

— самонастраивающаяся 264, 272

— — с настраиваемой моделью 275

— — с эталонной моделью 274

— следящая 26

— стабилизации 26

— статическая 59

— уравнений машинных 295

— условно устойчивая 73

— фазовой подстройки частоты 12

— — — цифровая 155, 202

— цифровая 27, 153

— экстремальная 264, 281

- с определенным знаком производной 281
- с производной 281
- с запоминанием экстремума 281
- с синхронным детектированием 280
- шаговые 281
- Соединение звеньев параллельное 55
- последовательное 54
- по схеме с обратной связью 56

Таблица коэффициентов ошибок 87

- преобразований Лапласа 321
- Z-преобразований 323

Теоремы преобразования Лапласа 320

Траектория движения 126, 217

Уравнение векторное дифференциальное 126

- разностное 216, 220
- Винера—Хопфа 147
- гармонической линеаризации 241
- нелинейной системы 244
- разностное 174
- Риккати 233
- Фоккера—Планка 275
- характеристическое 64, 178

Усилитель операционный 291

Условие инвариантности 119, 120

- физической реализуемости 29, 31
- устойчивости 65, 66, 178

Устойчивость автоколебаний 247

Устройство управления 7

Фильтр импульсный 160

- Калмана дискретный 225
- непрерывный 231

- канонический цифровой 186
- — — последовательной формы 187
- — — параллельной формы 187
- нижних частот 10
- цифровой с конечной длительностью переходного процесса 183
- формирующий 94, 223
- Форма квадратичная 135
- Функция дискретная 158
- импульсная переходная 28, 30, 31
- корреляционная ошибки 90
- передаточная 28, 29
- — нелинейного звена 246
- дискретная 161
- замкнутой системы 57
- ошибки 58
- разомкнутой системы 57
- переходная 28, 30

Характеристика амплитудно-фазовая 34

- амплитудно-частотная 34
- вещественная частотная 34
- дискриминационная 11
- логарифмическая амплитудно-частотная 34
- — фазово-частотная 34
- мнимая частотная 34
- пеленгационная 16, 43
- регулировочная 19, 46

Частота критическая 73

- резонансная 83
- сопряженная 48
- среза 73

Часть приведенная непрерывная 160

Шум квантования сигнала по уровню 154, 188

- угловой 95

Экстраполятор 158

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Основные сведения	7
§ 1.1. Основные понятия	7
§ 1.2. Система автоматической подстройки частоты	10
§ 1.3. Система фазовой автоподстройки частоты	12
§ 1.4. Система автоматического сопровождения цели бортовой РЛС	14
§ 1.5. Система автоматической регулировки усиления	18
§ 1.6. Система измерения дальности РЛС	22
§ 1.7. Обобщенная структурная схема системы РА	24
§ 1.8. Классификация систем РА	26
Глава 2. Основные характеристики систем радиоавтоматики	27
§ 2.1. Общее уравнение систем РА	27
§ 2.2. Передаточная функция	28
§ 2.3. Переходная и импульсная переходная функции	30
§ 2.4. Выходной сигнал системы РА при произвольном воздействии	33
§ 2.5. Комплексный коэффициент передачи и частотные характеристики	33
Глава 3. Элементы систем радиоавтоматики. Типовые звенья	36
§ 3.1. Линеаризация уравнений элементов систем РА	36
§ 3.2. Фазовые детекторы	37
§ 3.3. Частотные дискриминаторы	39
§ 3.4. Угловые дискриминаторы	41
§ 3.5. Исполнительные устройства	46
§ 3.6. Типовые звенья	47
§ 3.7. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев	51
Глава 4. Передаточные функции и дифференциальные уравнения систем радиоавтоматики	54
§ 4.1. Виды соединений звеньев в системах РА	54
§ 4.2. Передаточные функции	57
§ 4.3. Передаточные функции статических и астатических систем	58
§ 4.4. Передаточные функции многоконтурных систем	59
§ 4.5. Определение параметров элементов систем	61
§ 4.6. Дифференциальные уравнения систем	63
Глава 5. Анализ устойчивости систем радиоавтоматики	64
§ 5.1. Постановка задачи устойчивости	64

§ 5.2. Критерий устойчивости Гурвица	66
§ 5.3. Частотные критерии устойчивости	68
§ 5.4. Запасы устойчивости	72
§ 5.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ	74
§ 5.6. Устойчивость систем с запаздыванием	77
Глава 6. Анализ качества работы систем радиоавтоматики	79
§ 6.1. Постановка задачи	79
§ 6.2. Показатели качества переходного процесса	80
§ 6.3. Частотные показатели качества	82
§ 6.4. Анализ точности работы систем	84
§ 6.5. Средняя квадратическая ошибка системы	88
§ 6.6. Система с белым шумом на входе	93
Глава 7. Проектирование систем радиоавтоматики	98
§ 7.1. Постановка задачи	98
§ 7.2. Желаемая передаточная функция разомкнутой системы	100
§ 7.3. Определение передаточных функций корректирующих устройств	104
§ 7.4. Синтез систем с неполной информацией о воздействиях	113
§ 7.5. Комплексные системы	117
Глава 8. Анализ систем радиоавтоматики в пространстве состояний	124
§ 8.1. Векторные дифференциальные уравнения систем РА	124
§ 8.2. Матрица перехода	130
§ 8.3. Интегральные оценки	133
Глава 9. Синтез систем радиоавтоматики при случайных воздействиях	138
§ 9.1. Постановка задачи	138
§ 9.2. Синтез систем при заданной структурной схеме	142
§ 9.3. Физический смысл оптимальной полосы пропускания	143
§ 9.4. Синтез оптимальных систем	145
Глава 10. Цифровые системы радиоавтоматики	152
§ 10.1. Общие сведения. Структурная схема цифровой системы	152
§ 10.2. Математическая модель процесса преобразования непрерывного сигнала в дискретный	156
§ 10.3. Математический аппарат Z-преобразования	158
§ 10.4. Передаточные функции разомкнутых цифровых систем	160
§ 10.5. Передаточные функции и частотные характеристики цифровых систем	165
§ 10.6. Переходные процессы в цифровых системах	170
§ 10.7. Анализ точности работы цифровых систем	175
§ 10.8. Анализ устойчивости цифровых систем	178
§ 10.9. Синтез цифровых систем	181

§ 10.10. Цифровые корректирующие устройства	184
§ 10.11. Импульсные системы	192
§ 10.12. Цифровые устройства	195
§ 10.13. Цифровая система автоподстройки частоты	203
§ 10.14. Использование микропроцессорных средств в системах РА	208
Глава 11. Анализ и синтез цифровых систем радиоавтоматики в пространстве состояний	215
§ 11.1. Векторные разностные уравнения цифровых систем	215
§ 11.2. Дискретная матрица перехода	220
§ 11.3. Постановка задачи синтеза оптимального дискретного фильтра	223
§ 11.4. Дискретный фильтр Калмана	225
§ 11.5. Непрерывный фильтр Калмана	231
Глава 12. Анализ нелинейных систем радиоавтоматики	238
§ 12.1. Особенности нелинейных систем	238
§ 12.2. Метод гармонической линеаризации нелинейных звеньев	240
§ 12.3. Уравнение нелинейной системы	244
§ 12.4. Частотный метод определения параметров автоколебаний	246
§ 12.5. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик	249
§ 12.6. Применение метода статистической линеаризации для анализа стационарных режимов и срыва слежения	252
§ 12.7. Применение теории марковских процессов для анализа нелинейных систем	255
Глава 13. Оптимальные и адаптивные системы радиоавтоматики	262
§ 13.1. Основные сведения	262
§ 13.2. Принципы построения оптимальных систем	264
§ 13.3. Адаптивные системы	272
§ 13.4. Экстремальные системы	281
§ 13.5. Виды адаптивных систем	285
Глава 14. Математическое моделирование систем радиоавтоматики	289
§ 14.1. Основные сведения	289
§ 14.2. Математическое моделирование систем на АВМ	291
§ 14.3. Моделирование систем с помощью цифровых ЭВМ	299
Глава 15. Задачи по темам курса	305
Заключение	319
Приложения	320

Приложение П.1. Основные сведения о преобразовании Ла- пласа	320
Приложение Г.2. Формулы для интегрирования спектральной плотности	321
Приложение П.3. Z-преобразование наиболее часто встречаю- щихся функций	323
Приложение П.4. Краткие сведения из теории матриц . .	324
Список литературы	327
Предметный указатель	329

Учебное издание

Коновалов Геннадий Федорович

РАДИОАВТОМАТИКА

Зав. редакцией В. И. Трефилов

Редактор Е. М. Романчук

Младший редактор И. С. Скирдова

Художественный редактор Т. М. Скворцова

Оформление художника Ю. Д. Федичкина

Технический редактор Л. Ф. Попова

Корректор Г. А. Четкина

ИБ 8552

Изд. № ЭР—516. Слано в набор 02.02.90. Подп.
в печать 09.07.90. Т 08980. Формат 84×108¹/₃₂.
Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать
высокая. Объем 17,64 усл. печ. л. 17,64 усл.
кр.-отт. 16,46 уч.-изд. л. Тираж 35 000 экз.
Зак. № 493. Цена 85 коп.

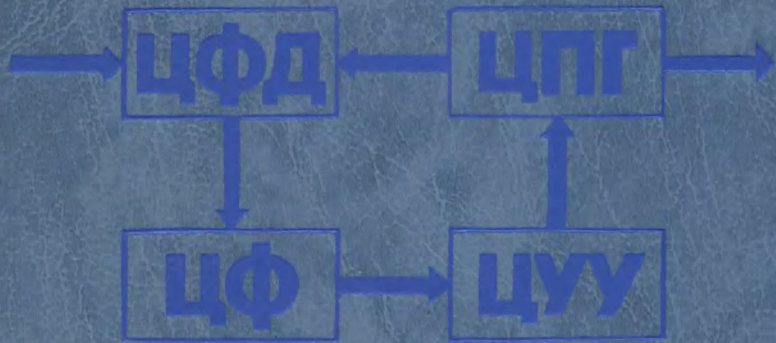
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва,
ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Владимирская типография Госкомпечати СССР
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Г. Ф. Коновалов

Радиоавтоматика

Радио- автоматика



Г. Ф. Коновалов



